

DM 5 : un corrigé

Partie I : Les polynômes de Bernoulli

1°) Soit $x \in \mathbb{R}$.

— D'après l'énoncé, $B_0(x) = 1$.

— Ainsi, $\int_0^x B_0(t) dt = x$, puis $\int_0^1 \left(\int_0^u B_0(t) dt \right) du = \int_0^1 u du = \frac{1}{2}$,

$$\text{donc } B_1(x) = x - \frac{1}{2}.$$

— Ainsi, $2 \int_0^x B_1(t) dt = x^2 - x$,

$$\text{puis } 2 \int_0^1 \left(\int_0^u B_1(t) dt \right) du = \int_0^1 (u^2 - u) du = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6},$$

$$\text{donc } B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

— Ainsi, $3 \int_0^x B_2(t) dt = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$,

$$\text{puis } 3 \int_0^1 \left(\int_0^u B_2(t) dt \right) du = \int_0^1 \left(u^3 - \frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2}u \right) du = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0,$$

$$\text{donc } B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x.$$

— Ainsi, $4 \int_0^x B_3(t) dt = x^4 - 2x^3 + x^2$, puis

$$4 \int_0^1 \left(\int_0^u B_3(t) dt \right) du = \int_0^1 (u^4 - 2u^3 + u^2) du = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{6 - 15 + 10}{30} = \frac{1}{30},$$

$$\text{donc } B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}.$$

2°) Posons $R(n)$ l'assertion suivante : B_n est un polynôme de degré n .

$B_0 = 1$, donc $R(0)$ est vraie.

Supposons que $n \in \mathbb{N}$ et que $R(n)$ est vraie.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x t^k dt = \frac{x^{k+1}}{k+1}$, donc d'après $R(n)$,

$x \mapsto \int_0^x B_n(t) dt$ est un polynôme de degré $n+1$.

Or $B_{n+1}(x) = (n+1) \int_0^x B_n(t) dt + C$, où C est une constante indépendante de x , donc B_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$.

3°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après l'énoncé,

$$B_n(x) = n \int_0^x B_{n-1}(t) dt - C, \text{ où } C = n \int_0^1 \left(\int_0^u B_{n-1}(t) dt \right) du.$$

$$\text{Ainsi, } \int_0^1 B_n(x) dx = n \int_0^1 \left(\int_0^x B_{n-1}(t) dt \right) du - C = C - C = 0.$$

4°)

◇ Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $R(n)$ l'assertion suivante :

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$.

$B_0 = 1$, donc $R(0)$ est vraie.

$B_1 = (x \mapsto x - \frac{1}{2})$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $B_1(1-x) = \frac{1}{2} - x = -B_1(x)$,

ce qui prouve $R(1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $R(n)$ est vraie.

Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après l'énoncé,

$$B_{n+1}(1-x) = (n+1) \int_0^{1-x} B_n(t) dt - C \text{ où } C = (n+1) \int_0^1 \left(\int_0^u B_n(t) dt \right) du.$$

En posant $u = 1-t$, on obtient que $\int_0^{1-x} B_n(t) dt = \int_1^x B_n(1-u)(-du)$, donc d'après

$R(n)$, $\int_0^{1-x} B_n(t) dt = (-1)^{n+1} \int_1^x B_n(u) du$, puis d'après la question 3, sachant que

$n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{1-x} B_n(t) dt = (-1)^{n+1} \left(\int_1^x B_n(u) du + \int_0^1 B_n(u) du \right)$, puis d'après la

relation de Chasles, $\int_0^{1-x} B_n(t) dt = (-1)^{n+1} \int_0^x B_n(u) du$.

$$\text{Ainsi, } B_{n+1}(1-x) = (-1)^{n+1} (n+1) \int_0^x B_n(t) dt - C.$$

Si n est impair, alors $(-1)^{n+1} = 1$,

$$\text{donc } B_{n+1}(1-x) = (-1)^{n+1} ((n+1) \int_0^x B_n(t) dt - C) = (-1)^{n+1} B_{n+1}(x).$$

Supposons maintenant que n est pair.

$$\text{Alors } B_{n+1}(1-x) = -(n+1) \int_0^x B_n(t) dt - C = -B_{n+1}(x) - 2C.$$

$$\text{On en déduit que } \int_0^1 B_{n+1}(1-x) dx = - \int_0^1 B_{n+1}(x) dx - 2C.$$

$$\text{Or en posant } u = 1-x, \int_0^1 B_{n+1}(1-x) dx = \int_1^0 B_{n+1}(u)(-du) = \int_0^1 B_{n+1}(u) du,$$

$$\text{donc } -2C = 2 \int_0^1 B_{n+1}(x) dx = 0, \text{ d'après la question précédente. Ainsi, } C = 0$$

$$\text{et on a encore } B_{n+1}(1-x) = (-1)^{n+1} ((n+1) \int_0^x B_n(t) dt - C) = (-1)^{n+1} B_{n+1}(x), \text{ ce}$$

qui prouve $R(n+1)$ dans tous les cas.

◇ Supposons d'abord que n est pair. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $B_n(1-t) = B_n(t)$, donc en remplaçant t par $\frac{1}{2} - x$, on obtient que $B_n(\frac{1}{2} + x) = B_n(\frac{1}{2} - x)$, ce qui prouve que le graphe de B_n est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = \frac{1}{2}$.

Supposons maintenant que n est impair. Alors $B_n(\frac{1}{2} + x) = -B_n(\frac{1}{2} - x)$, donc les deux points du graphe de B_n , de coordonnées $(\frac{1}{2} - x, B_n(\frac{1}{2} - x))$ et $(\frac{1}{2} + x, B_n(\frac{1}{2} + x))$, ont constamment pour milieu le point de coordonnées $(\frac{1}{2}, 0)$. Ainsi, le graphe de B_n est symétrique par rapport à ce dernier point.

5°) Soit $n \geq 2$. D'après l'énoncé, B_n est dérivable et $B'_n = nB_{n-1}$, or $n-1 \geq 1$, donc d'après la question 3, $0 = n \int_0^1 B_{n-1}(t) dt = \int_0^1 B'_n(t) dt = B_n(1) - B_n(0)$. Ceci démontre que $B_n(1) = B_n(0) = b_n$.

6°) On a en fait déjà montré cette propriété au sein de la récurrence de la question 4, lorsqu'on a prouvé que $C = 0$ dans le cas où n était pair. On peut aussi écrire :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 4,

$B_{2n+1}(1) = B_{2n+1}(1-0) = (-1)^{2n+1} B_{2n+1}(0) = -b_{2n+1}$, or d'après la question précédente, $B_{2n+1}(1) = b_{2n+1}$, car $2n+1 \geq 2$. Ainsi, $b_{2n+1} = -b_{2n+1}$, donc $b_{2n+1} = 0$.

Partie II : la formule d'Euler-Maclaurin

7°) $B'_1 = 1$, donc B_1 est une primitive de 1. Ainsi, par intégration par parties, $\int_0^1 f(t) dt = [f(t)B_1(t)]_0^1 - \int_0^1 f'(t)B_1(t) dt$. Or $B_1(t) = t - \frac{1}{2}$, donc $B_1(0) = -\frac{1}{2}$ et $B_1(1) = \frac{1}{2}$. Ainsi, on a montré que $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) - \int_0^1 f'(t)B_1(t) dt$.

8°) Notons $R(n)$ la propriété de l'énoncé. D'après la question précédente, $R(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $R(n)$ et on montre $R(n+1)$. En intégrant par parties, sachant que $\frac{B_{2n+2}}{2n+2}$ est une primitive de B_{2n+1} ,

$$\int_0^1 f^{(2n+1)}(t)B_{2n+1}(t) dt = \left[f^{(2n+1)}(t) \frac{B_{2n+2}(t)}{2n+2} \right]_0^1 - \int_0^1 f^{(2n+2)}(t) \frac{B_{2n+2}(t)}{2n+2} dt.$$

Or $B_{2n+2}(1) = B_{2n+2}(0) = b_{2n+2}$, car $2n+2 \geq 2$, donc

$$\int_0^1 f^{(2n+1)}(t)B_{2n+1}(t) dt = \frac{b_{2n+2}}{2n+2}(f^{(2n+1)}(1) - f^{(2n+1)}(0)) - \int_0^1 f^{(2n+2)}(t) \frac{B_{2n+2}(t)}{2n+2} dt.$$

Une nouvelle intégration par parties donne

$$\int_0^1 f^{(2n+2)}(t)B_{2n+2}(t) dt = \left[f^{(2n+2)}(t) \frac{B_{2n+3}(t)}{2n+3} \right]_0^1 - \int_0^1 f^{(2n+3)}(t) \frac{B_{2n+3}(t)}{2n+3} dt.$$

Or $B_{2n+3}(1) = B_{2n+3}(0) = 0$, d'après la question 6. Ainsi,

$$\int_0^1 f^{(2n+2)}(t)B_{2n+2}(t) dt = - \int_0^1 f^{(2n+3)}(t) \frac{B_{2n+3}(t)}{2n+3} dt.$$

En combinant ces deux calculs, on obtient

$$\int_0^1 f^{(2n+1)}(t) B_{2n+1}(t) dt = \frac{b_{2n+2}}{2n+2} (f^{(2n+1)}(1) - f^{(2n+1)}(0)) + \int_0^1 f^{(2n+3)}(t) \frac{B_{2n+3}(t)}{(2n+2)(2n+3)} dt.$$

Alors, d'après $R(n)$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t) dt &= \frac{1}{2} (f(0) + f(1)) - \sum_{k=1}^n (f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)) \frac{b_{2k}}{(2k)!} \\ &\quad - \frac{b_{2n+2}}{(2n+2)!} (f^{(2n+1)}(1) - f^{(2n+1)}(0)) - \frac{1}{(2n+3)!} \int_0^1 f^{(2n+3)}(t) B_{2n+3}(t) dt, \end{aligned}$$

ce qui démontre $R(n+1)$.

Le principe de récurrence permet de conclure.

9°) $B'_{2n+2}(x) = (2n+2)B_{2n+1}(x)$. Ainsi, $B'_{2n+2}(x)$ est de signe constant $]0, \frac{1}{2}[$, donc par continuité, $B'_{2n+2}(x)$ est de signe constant sur $[0, \frac{1}{2}]$ et s'annule au plus en 0 et en $\frac{1}{2}$. Ainsi, d'après le cours, B_{2n+2} est strictement monotone sur $[0, \frac{1}{2}]$. Elle s'annule donc au plus une fois sur $]0, \frac{1}{2}[$. De plus, si elle ne s'annulait pas sur $]0, \frac{1}{2}[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle serait de signe constant sur $]0, \frac{1}{2}[$, puis par continuité

sur $[0, \frac{1}{2}]$. Mais nous allons montrer que $\int_0^{\frac{1}{2}} B_{2n+2}(t) dt = 0$, or B_{2n+2} est continue, donc si elle était de signe constant sur $[0, \frac{1}{2}]$, B_{2n+2} serait identiquement nulle sur $[0, \frac{1}{2}]$, ce qui est faux car c'est un polynôme de degré $2n+2$. Ainsi B_{2n+2} s'annule une unique

fois sur $]0, \frac{1}{2}[$... si l'on montre que $\int_0^{\frac{1}{2}} B_{2n+2}(t) dt = 0$:

en posant $x = 1 - t$, on obtient $\int_0^{\frac{1}{2}} B_{2n+2}(t) dt = \int_1^{\frac{1}{2}} B_{2n+2}(1-x)(-dx)$, donc d'après

la question 4, $\int_0^{\frac{1}{2}} B_{2n+2}(t) dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 B_{2n+2}(x) dx$.

On en déduit que $0 = \int_0^1 B_{2n+2}(t) dt = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} B_{2n+2}(t) dt$.

10°) Notons à nouveau $R(n)$ la propriété de l'énoncé et démontrons-la par récurrence. $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$, donc B_1 est strictement négatif sur $]0, \frac{1}{2}[$.

Alors d'après la question 9 avec $n = 0$, B_2 est strictement monotone sur $[0, \frac{1}{2}]$ et B_2 s'annule une unique fois sur $]0, \frac{1}{2}[$, donc $R(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $R(n)$.

Supposons d'abord que B_{2n+2} est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et notons c l'unique réel de $]0, \frac{1}{2}[$ tel que $B_{2n+2}(c) = 0$. Ainsi, $B_{2n+2}(x)$ est strictement négatif sur $[0, c[$ et strictement positif sur $]c, \frac{1}{2}]$. Or $B'_{2n+3} = (2n+3)B_{2n+2}$, donc B_{2n+3} est strictement décroissante sur $[0, c]$, avec $B_{2n+3}(0) = b_{2n+3} = 0$ d'après la question 6, puis elle est strictement croissante sur $[c, \frac{1}{2}]$, avec $B_{2n+3}(\frac{1}{2}) = 0$, car d'après la question 4, $B_{2n+3}(\frac{1}{2}) = (-1)^{2n+3} B_{2n+3}(1 - \frac{1}{2}) = -B_{2n+3}(\frac{1}{2})$.

Ainsi, B_{2n+3} est strictement négative sur $]0, \frac{1}{2}[$.

Dans l'autre cas, lorsque B_{2n+2} est strictement décroissante sur $[0, \frac{1}{2}]$, en adaptant le raisonnement précédent, on montre que B_{2n+3} est strictement positive sur $]0, \frac{1}{2}[$.

Alors d'après la question 9, on en déduit que B_{2n+4} est strictement monotone sur $[0, \frac{1}{2}]$ et que B_{2n+4} s'annule une unique fois sur $]0, \frac{1}{2}[$, ce qui prouve $R(n+1)$.

11°) g étant continue sur le segment $[0, 1]$, elle est bornée et elle atteint ses bornes. Il existe donc $m, M \in [0, 1]$ tels que, pour tout $t \in [0, 1]$, $g(m) \leq g(t) \leq g(M)$. Soit $t \in [0, 1]$. $h(t) \geq 0$, donc $g(m)h(t) \leq g(t)h(t) \leq g(M)h(t)$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $g(m) \int_0^1 h(t) dt \leq \int_0^1 g(t)h(t) dt \leq g(M) \int_0^1 h(t) dt$.

Premier cas : si $\int_0^1 h(t) dt = 0$, alors d'après l'encadrement précédent,

$$\int_0^1 g(t)h(t) dt = 0, \text{ et on peut écrire } \int_0^1 g(t)h(t) dt = g\left(\frac{1}{2}\right) \int_0^1 h(t) dt.$$

Second cas : si $\int_0^1 h(t) dt \neq 0$, alors h étant positive, $\int_0^1 h(t) dt > 0$, donc l'encadrement

$$\text{devient } g(m) \leq \frac{\int_0^1 g(t)h(t) dt}{\int_0^1 h(t) dt} \leq g(M). \text{ Alors le théorème des valeurs intermédiaires,}$$

valable ici car g est continue, permet de conclure.

12°) Soit $n \in \mathbb{N}$. Si l'on reprend la démonstration de la question 8, on voit qu'à partir de $R(n)$, après la première intégration par parties, on a montré que

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t) dt &= \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) - \sum_{k=1}^n (f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)) \frac{b_{2k}}{(2k)!} \\ &\quad - \frac{b_{2n+2}}{(2n+2)!} (f^{(2n+1)}(1) - f^{(2n+1)}(0)) + \frac{1}{(2n+2)!} \int_0^1 f^{(2n+2)}(t) B_{2n+2}(t) dt \\ &= \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) - \sum_{k=1}^n (f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)) \frac{b_{2k}}{(2k)!} \\ &\quad + \frac{1}{(2n+2)!} \int_0^1 f^{(2n+2)}(t) (B_{2n+2}(t) - b_{2n+2}) dt. \end{aligned}$$

Supposons que B_{2n+2} est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$. Alors, pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $B_{2n+2}(x) \geq B_{2n+2}(0) = b_{2n+2}$.

De plus si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, $1-x \in [0, \frac{1}{2}]$,

donc $B_{2n+2}(x) = (-1)^{2n+2} B_{2n+2}(1-x) = B_{2n+2}(1-x) \geq b_{2n+2}$,

donc $x \mapsto B_{2n+2}(x) - b_{2n+2}$ est positive sur $[0, 1]$.

D'après la question 10, dans l'autre cas, B_{2n+2} est strictement décroissante sur $[0, \frac{1}{2}]$. Alors un raisonnement similaire montre que $x \mapsto B_{2n+2}(x) - b_{2n+2}$ est négative sur $[0, 1]$.

En question 11, le résultat est encore valable lorsque h est négative sur $[0, 1]$, car il suffit d'appliquer la question 11 avec $-h$. Or on a vu que dans tous les cas,

$x \mapsto B_{2n+2}(x) - b_{2n+2}$ est de signe constant sur $[0, 1]$, donc d'après la question 11 généralisée, il existe $c \in [0, 1]$ tel que

$$\int_0^1 f^{(2n+2)}(t)(B_{2n+2}(t) - b_{2n+2}) dt = f^{(2n+2)}(c) \int_0^1 (B_{2n+2}(t) - b_{2n+2}) dt.$$

D'autre part, d'après la question 3,) $\int_0^1 B_{2n+2}(t) dt = 0$,

$$\text{donc } \int_0^1 f^{(2n+2)}(t)(B_{2n+2}(t) - b_{2n+2}) dt = -b_{2n+2} f^{(2n+2)}(c).$$

On a donc montré qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t) dt &= \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) - \sum_{k=1}^n (f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)) \frac{b_{2k}}{(2k)!} \\ &\quad - \frac{b_{2n+2}}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(c). \end{aligned}$$

Partie III : Développement asymptotique de $\sum_{p=1}^N \frac{1}{p}$.

13°) Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $R(n)$ l'assertion suivante : $\frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{1}{t+a} \right) = \frac{(-1)^n n!}{(t+a)^{n+1}}$.

On vérifie facilement $R(0)$ et $R(n) \implies R(n+1)$, donc $R(n)$ est vraie d'après le principe de récurrence.

14°) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Appliquons la question 12 avec la fonction $f(t) = \frac{1}{t+p}$, qui est bien de classe C^∞ sur $[0, 1]$.

On calcule $\int_0^1 f(t) dt = [\ln(t+p)]_0^1 = \ln(p+1) - \ln p$, donc d'après la question précédente, il existe $c \in [0, 1]$ tel que

$$\begin{aligned} \ln(p+1) - \ln p &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} \right) - \sum_{k=1}^n \left(\frac{(-1)^{2k-1} (2k-1)!}{(p+1)^{2k}} - \frac{(-1)^{2k-1} (2k-1)!}{p^{2k}} \right) \frac{b_{2k}}{(2k)!} \\ &\quad - \frac{b_{2n+2}}{(2n+2)!} \frac{(-1)^{2n+2} (2n+2)!}{(c+p)^{2n+3}}. \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} \right) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{(p+1)^{2k}} - \frac{1}{p^{2k}} \right) \frac{b_{2k}}{2k} \\ &\quad - \frac{b_{2n+2}}{(c+p)^{2n+3}}, \end{aligned}$$

ce qui conclut en posant $c_{p,n} = c + p \in [p, p+1]$.

15°) Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Sommons la relation de la question précédente lorsque p varie de 1 à $N-1$.

$$\sum_{p=1}^{N-1} (\ln(p+1) - \ln p) = \sum_{p=2}^N \ln p - \sum_{p=1}^{N-1} \ln p = \ln N - \ln 1 = \ln N. \text{ De plus,}$$

$$\sum_{p=1}^{N-1} \left(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p} \right) = \sum_{p=2}^N \frac{1}{p} + \sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{p} = 2 \sum_{p=1}^N \frac{1}{p} - 1 - \frac{1}{N},$$

$$\text{donc } \sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p} \right) = \left(\sum_{p=1}^N \frac{1}{p} \right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2N}.$$

Ensuite, par commutativité de l'addition,

$$\sum_{p=1}^{N-1} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{(p+1)^{2k}} - \frac{1}{p^{2k}} \right) \frac{b_{2k}}{2k} = \sum_{k=1}^n \frac{b_{2k}}{2k} \sum_{p=1}^{N-1} \left(\frac{1}{(p+1)^{2k}} - \frac{1}{p^{2k}} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{b_{2k}}{2k} \left(\frac{1}{N^{2k}} - 1 \right),$$

$$\text{donc on obtient bien } \ln N = \left(\sum_{p=1}^N \frac{1}{p} \right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2N} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{N^{2k}} - 1 \right) \frac{b_{2k}}{2k} - b_{2n+2} \sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{c_{p,n}^{2n+3}}.$$

16°)

◇ Pour tout $t \in [p-1, p]$, $c_{p,n} \geq t$, donc $\frac{1}{c_{p,n}^{2n+3}} \leq \frac{1}{t^{2n+3}}$. Alors, en intégrant entre $p-1$

$$\text{et } p, \text{ on en déduit que } 0 \leq \frac{1}{c_{p,n}^{2n+3}} \leq \int_{p-1}^p \frac{dt}{t^{2n+3}}.$$

◇ À l'aide de la relation de Chasles, on en déduit que, pour tout $N \geq 3$, $0 \leq \sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{c_{p,n}^{2n+3}} \leq \frac{1}{c_1^{2n+3}} + \int_1^{N-1} \frac{dt}{t^{2n+3}} \leq 1 + \left[\frac{t^{-2n-2}}{-2n-2} \right]_1^{N-1} \leq 1 + \frac{1}{2n+2}$. Ceci démontre

que la suite $\left(\sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{c_{p,n}^{2n+3}} \right)_{N \geq 3}$ est majorée, or elle est croissante, donc elle converge vers

un réel que l'on peut noter S_n .

◇ Soit $N \geq 2$. Soit $M \in \mathbb{N}$ tel que $M \geq N$.

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{p=1}^M \frac{1}{c_{p,n}^{2n+3}} - \sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{c_{p,n}^{2n+3}} &= \sum_{p=N}^M \frac{1}{c_{p,n}^{2n+3}} \leq \int_{N-1}^M \frac{dt}{t^{2n+3}} = \left[\frac{t^{-2n-2}}{-2n-2} \right]_{N-1}^M \\ &\leq \frac{1}{(2n+2)(N-1)^{2n+2}}. \end{aligned}$$

$$\text{En faisant tendre } M \text{ vers } +\infty, \text{ on en déduit que } 0 \leq S_n - \sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{c_{p,n}^{2n+3}} \leq \frac{1}{(2n+2)(N-1)^{2n+2}}.$$

17°) D'après la question 15,

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^N \frac{1}{p} &= \ln N + \frac{1}{2} + \frac{1}{2N} - \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{N^{2k}} - 1 \right) \frac{b_{2k}}{2k} + b_{2n+2} \sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{c_{p,n}^{2n+3}} \\ &= \ln N + \frac{1}{2N} - \sum_{k=1}^n \frac{b_{2k}}{2k N^{2k}} + b_{2n+2} \left(\sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{c_{p,n}^{2n+3}} - S_n \right) + \gamma_n, \end{aligned}$$

$$\text{en posant } \gamma_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{b_{2k}}{2k} + b_{2n+2} S_n.$$

Fixons $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\left(\sum_{p=1}^N \frac{1}{p}\right) - \ln N = \frac{1}{2N} - \sum_{k=1}^n \frac{b_{2k}}{2kN^{2k}} + b_{2n+2} \left(\sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{c_{p,n}^{2n+3}} - S_n \right) + \gamma_n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \gamma_n, \text{ donc}$$

$\gamma_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{p=1}^N \frac{1}{p} - \ln N \right)$. Ceci prouve que γ_n ne dépend pas de n . On notera γ cette

constante indépendante de n et de N . Ainsi,

$$\sum_{p=1}^N \frac{1}{p} = \ln N + \gamma + \frac{1}{2N} - \sum_{k=1}^n \frac{b_{2k}}{2kN^{2k}} + \frac{b_{2n+2}}{2n+2} R_{n,N}, \text{ avec } R_{n,N} = (2n+2) \left(\sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{c_{p,n}^{2n+3}} - S_n \right).$$

D'après la question précédente, $|R_{n,N}| \leq \frac{1}{(N-1)^{2n+2}}$