

DS 2

Les calculatrices sont interdites.

Exercices

Exercice 1 :

- 1°) En utilisant les complexes, pour tous $p, q \in \mathbb{R}$, factoriser $\cos(p) + \cos(q)$.
2°) Résoudre l'équation (E) : $3 \cos(5x) = \cos(4x) + \cos(14x)$, en l'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 :

Calculer la dérivée n -ième de $x \mapsto \cos^3 x$ et de $x \mapsto \frac{2x}{x^2 - 1}$.

Exercice 3 :

Calculer $\int \frac{2x}{x^2 + 2x + 9} dx$.

Problème 1 : volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$

Notations et résultats admis.

Pour tout entier $d \geq 1$, lorsque $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_d) \in \mathbb{R}^d$.

Pour tout entier $d \geq 1$ et tout $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, on note $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2}$ et, pour tout réel $r \geq 0$, on note $B_d(r) = \{x \in \mathbb{R}^d / \|x\| \leq r\}$. $B_d(r)$ s'appelle la boule fermée de $\mathbb{R}^d$ de centre 0 et de rayon r .

Lorsque $d \geq 2$, on identifie $\mathbb{R}^d$ à $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$ en écrivant tout $x \in \mathbb{R}^d$ sous la forme $x = (y, t)$, avec $y = (x_1, \dots, x_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1}$ et $t = x_d \in \mathbb{R}$; on a alors $\|x\|^2 = \|y\|^2 + t^2$.

On admet que, pour tout entier $d \geq 1$, on dispose d'une notion de *volume* (longueur si $d = 1$, aire si $d = 2$), qui associe à chaque partie A de $\mathbb{R}^d$ considérée dans ce problème un réel $\text{vol}_d(A) \geq 0$, de sorte que :

(V1) si $A \subset A'$, alors $\text{vol}_d(A) \leq \text{vol}_d(A')$;

(V2) si $A_1, \dots, A_p$ sont p parties deux à deux disjointes de $\mathbb{R}^d$, alors

$\text{vol}_d(A_1 \cup \dots \cup A_p) = \text{vol}_d(A_1) + \dots + \text{vol}_d(A_p)$;
 (V3) pour tous réels $a \leq b$, $\text{vol}_1([a, b]) = b - a$;
 (V4) si $d \geq 2$, pour toute partie A de $\mathbb{R}^{d-1}$ et tous réels $a \leq b$,
 $\text{vol}_d(A \times [a, b]) = (b - a) \text{vol}_{d-1}(A)$;
 (V5) pour tout réel $\lambda > 0$, $\text{vol}_d(\lambda A) = \lambda^d \text{vol}_d(A)$, où $\lambda A = \{\lambda x \mid x \in A\}$.
 On ne suppose connue aucune autre propriété de cette notion de volume.
 On note $V_d = \text{vol}_d(B_d(1))$ le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^d$.
 L'objet du problème est de calculer V_d pour tout entier $d \geq 1$.

Partie A : Intégrales de Wallis

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose $W_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^m d\theta$.

- 1°) Calculer W_0 et W_1 . Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $W_m > 0$ et $W_{m+1} < W_m$.
- 2°) En intégrant par parties, montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $W_{m+2} = \frac{m+1}{m+2} W_m$.
 En déduire les valeurs de W_2, W_3, W_4, W_5 et W_6 .
- 3°) Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $(m+1)W_{m+1}W_m = \frac{\pi}{2}$.

Partie B : Découpage de la boule unité en tubes

Dans cette partie, on fixe un entier $n \geq 2$ et l'on pose

$$J_n = \int_0^1 2(n-1)r^{n-2}\sqrt{1-r^2} dr$$

Le but de cette partie est de démontrer que $V_n = V_{n-1}J_n$.

On fixe $N \in \mathbb{N}^*$ et l'on pose $r_k = \frac{k}{N}$ pour tout $k \in \{0, \dots, N\}$.

On pose $C_1 = B_{n-1}(r_1)$ et, pour tout $k \in \{2, \dots, N\}$, $C_k = B_{n-1}(r_k) \setminus B_{n-1}(r_{k-1})$.
 Pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$, on note $P_k = \{(y, t) \in B_n(1) \mid y \in C_k\}$ et $a_k = r_k^{n-1} - r_{k-1}^{n-1}$.

On note enfin g la fonction définie sur $[0, 1]$ par $g(r) = \sqrt{1-r^2}$.

- 4°) Montrer que $V_1 = 2$ et que, pour tout réel $r > 0$, $\text{vol}_{n-1}(B_{n-1}(r)) = V_{n-1}r^{n-1}$.
 En déduire que $\text{vol}_{n-1}(C_k) = V_{n-1}a_k$ pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$.

5°) 5.a) Montrer que les parties $P_1, \dots, P_N$ sont deux à deux disjointes et que leur réunion est $B_n(1)$.

5.b) Soit $k \in \{1, \dots, N\}$. Montrer que

$$C_k \times [-g(r_k), g(r_k)] \subset P_k \subset C_k \times [-g(r_{k-1}), g(r_{k-1})].$$

5.c) On pose $s_N = 2V_{n-1} \sum_{k=1}^N g(r_k)a_k$ et $S_N = 2V_{n-1} \sum_{k=1}^N g(r_{k-1})a_k$.

Montrer que $s_N \leq V_n \leq S_N$.

6°) Montrer que $s_N \leq V_{n-1}J_n \leq S_N$: on pourra utiliser une écriture de a_k sous la forme d'une intégrale.

7°) Montrer que $S_N - s_N \leq \frac{2(n-1)V_{n-1}}{N}$.

En déduire que $V_n = V_{n-1}J_n$.

Partie C : Calcul de V_n

8°) Soit $n \geq 2$. Exprimer J_n en fonction de W_{n-2} et W_n , puis montrer que $J_n = 2W_n$. Calculer V_2 et V_3 .

9°) Montrer que $V_n = \frac{2\pi}{n}V_{n-2}$ pour tout entier $n \geq 3$.

En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, des expressions simples de V_{2p} et de V_{2p-1} en fonction de p . Calculer V_4 , V_5 et V_6 .

10°) On admet que $\pi < 3,2$.

10.a) Montrer que $V_1 < V_2 < V_3 < V_4 < V_5$ et que la suite $(V_n)_{n \geq 5}$ est strictement décroissante.

10.b) Montrer que $V_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Problème 2 : induction structurelle

Dans tout ce problème, on fixe un ensemble E .

Lorsque c désigne une application de E^k dans E , où $k \in \mathbb{N}^*$, et lorsque Y est une partie de E , on dit que Y est stable par c si et seulement si $c(Y^k) \subset Y$.

1°) Pour cette seule question, $E = \mathbb{Z}$, c désigne une application de E^2 dans E et Y est une partie de E . Déterminer $c(Y^2)$ dans les deux cas suivants, et préciser si Y est stable par c :

1.a) $c(x, y) = x + y$ et $Y = \{0, 1\}$;

1.b) $c(x, y) = x - y$ et $Y = \mathbb{N}$.

Pour toute la suite de ce problème, on fixe une partie B de E , un entier $r \in \mathbb{N}^*$, des entiers $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}^*$ et, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, une application $c_i : E^{k_i} \rightarrow E$. Les éléments de B sont appelés les *atomes* et les applications $c_1, \dots, c_r$ les *constructeurs*.

Une partie Y de E sera simplement dite *stable* si et seulement si Y est stable par chacun des c_i pour $i \in \mathbb{N}_r$.

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des parties stables de E qui contiennent B , et X l'intersection de tous les éléments de $\mathcal{S}$, c'est-à-dire : $X = \bigcap_{Y \in \mathcal{S}} Y$.

2°) 2.a) Montrer que X est correctement défini.

2.b) Soit $(Y_j)_{j \in J}$ une famille de parties stables de E , indexée par un ensemble J non vide. Montrer que $\bigcap_{j \in J} Y_j$ est une partie stable de E .

2.c) Montrer que X est la plus petite partie stable de E contenant B .

On dit que X est l'ensemble *défini inductivement* par les atomes de B et les constructeurs $c_1, \dots, c_r$.

3°) Principe d'induction structurelle

3.a) Soit $\mathcal{P}$ un prédicat défini sur X : pour tout $x \in X$, $\mathcal{P}(x)$ est une assertion, vraie ou fausse. On suppose que :

(i) pour tout $b \in B$, $\mathcal{P}(b)$ est vraie ;

(ii) pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$ et tout $(x_1, \dots, x_{k_i}) \in X^{k_i}$, si $\mathcal{P}(x_1), \dots, \mathcal{P}(x_{k_i})$ sont vraies, alors $\mathcal{P}(c_i(x_1, \dots, x_{k_i}))$ est vraie.

Montrer que $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tout $x \in X$.

Lorsqu'on utilise ce procédé pour prouver que $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tout $x \in X$, on dit que l'on raisonne par induction sur X .

3.b) Dans cette sous-question, $E = \mathbb{N}$, $B = \{0\}$, $r = 1$, $k_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_1(n) = n + 1$. Déterminer X . Que devient alors le principe d'induction structurelle ?

4°) Un exemple : les formules propositionnelles

Dans cette question, $\mathcal{V}$ désigne un ensemble dont les éléments sont considérés comme des variables propositionnelles.

4.a) En vous appuyant sur le cours, préciser un ensemble E , une partie B de E et des constructeurs (en indiquant leurs arités k_i) pour lesquels l'ensemble X défini inductivement est l'ensemble $\mathcal{F}$ des formules propositionnelles écrites avec les variables de $\mathcal{V}$.

On note $\mathcal{F}^+$ l'ensemble défini inductivement, avec le même ensemble E , par les atomes de $\mathcal{V}$ et les deux seuls constructeurs $(\varphi, \psi) \mapsto (\varphi \wedge \psi)$ et $(\varphi, \psi) \mapsto (\varphi \vee \psi)$: c'est donc l'ensemble des formules propositionnelles écrites en n'utilisant que les connecteurs logiques $\vee$ et $\wedge$.

On rappelle qu'une *distribution de valeurs de vérité* (abrégée en dvv) est une application v de $\mathcal{V}$ dans $\{0, 1\}$, où 1 désigne "vrai" et où 0 représente "faux". On a vu en cours comment v se prolonge naturellement en une application de $\mathcal{F}$ dans $\{0, 1\}$.

Si v et w sont deux dvv, on convient que $v \leq w$ si et seulement si $v(p) \leq w(p)$ pour tout $p \in \mathcal{V}$.

4.b) Montrer que $\mathcal{F}^+ \subset \mathcal{F}$, puis que, pour toute formule $\varphi \in \mathcal{F}^+$ et toutes dvv v, w telles que $v \leq w$, on a $v(\varphi) \leq w(\varphi)$.

4.c) Soit $p \in \mathcal{V}$. En déduire qu'il n'existe aucune formule $\varphi \in \mathcal{F}^+$ qui soit logiquement équivalente à $\neg p$.

5°) Montrer que $X = B \cup c_1(X^{k_1}) \cup \dots \cup c_r(X^{k_r})$.

Ainsi, tout élément de X est un atome ou s'écrit $c_i(x_1, \dots, x_{k_i})$, avec $i \in \{1, \dots, r\}$ et $x_1, \dots, x_{k_i} \in X$.

6°) Description « par le bas »

On définit une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties de E en posant $X_0 = B$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$X_{n+1} = X_n \cup c_1((X_n)^{k_1}) \cup \dots \cup c_r((X_n)^{k_r}).$$

6.a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \subset X_{n+1}$ et $X_n \subset X$.

6.b) Montrer que $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$.

6.c) En déduire une seconde démonstration du principe d'induction structurale (question **3.a**), à l'aide d'une récurrence sur n .

Lecture unique et définitions par induction.

On dit que X vérifie la *propriété de lecture unique* lorsque :

- pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, la restriction de c_i à X^{k_i} est injective ;
- les parties $B, c_1(X^{k_1}), \dots, c_r(X^{k_r})$ sont deux à deux disjointes.

D'après la question **5**, cela signifie que tout élément de X est ou bien un atome, ou bien s'écrit *d'une seule façon* sous la forme $c_i(x_1, \dots, x_{k_i})$ avec $i \in \{1, \dots, r\}$ et $x_1, \dots, x_{k_i} \in X$. On admet alors le résultat suivant.

Théorème (définition par induction). On suppose que X vérifie la propriété de lecture unique. Soient Ω un ensemble, $\beta : B \rightarrow \Omega$ une application et, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, $\gamma_i : \Omega^{k_i} \rightarrow \Omega$ une application.

Alors, il existe une unique application $\theta : X \rightarrow \Omega$ telle que :

- pour tout $b \in B$, $\theta(b) = \beta(b)$;
- pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$ et tout $(x_1, \dots, x_{k_i}) \in X^{k_i}$,
$$\theta(c_i(x_1, \dots, x_{k_i})) = \gamma_i(\theta(x_1), \dots, \theta(x_{k_i})).$$

On dit alors que θ est *définie par induction*.

7°) On se place dans la situation de la question **3.b**. Montrer que X vérifie la propriété de lecture unique, puis expliquer comment le théorème précédent permet de retrouver le théorème de définition d'une suite par récurrence.

8°) Démontrer l'unicité affirmée dans le théorème de définition par induction.

9°) Un exemple : les rationnels strictement positifs

Dans cette question uniquement, $E = \mathbb{R}$, $B = \{1\}$, $r = 2$, $k_1 = k_2 = 1$, c_1 et c_2 sont les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $c_1(x) = x + 1$, $c_2(x) = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $c_2(0) = 0$. On note $\mathbb{Q}_+^*$ l'ensemble des nombres rationnels strictement positifs.

9.a) Montrer que $X \subset \mathbb{Q}_+^*$.

9.b) Pour tout entier $s \geq 2$, on note $H(s)$ l'assertion : « pour tous $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $p + q = s$, $\frac{p}{q} \in X$ ». Démontrer $H(s)$ pour tout entier $s \geq 2$. Qu'en déduit-on pour X ?

9.c) Montrer que X ne vérifie pas la propriété de lecture unique.

Montrer qu'il n'existe aucune application $\theta : X \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $\theta(1) = 0$,

$\theta(x + 1) = \theta(x) + 1$ pour tout $x \in X$, et $\theta\left(\frac{1}{x}\right) = \theta(x) + 1$ pour tout $x \in X \setminus \{1\}$.

10°) L'exemple des arbres binaires stricts

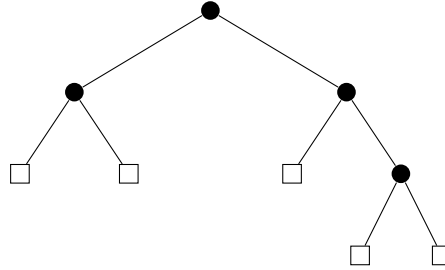
On admet l'existence d'un ensemble $\mathcal{A}$, d'un élément F de $\mathcal{A}$ et d'une application $N : \mathcal{A}^2 \rightarrow \mathcal{A}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- (A1) N est injective ;
- (A2) F n'appartient pas à l'image de N ;
- (A3) si Y est une partie de $\mathcal{A}$ telle que $F \in Y$ et, pour tous $g, d \in Y$, $N(g, d) \in Y$, alors $Y = \mathcal{A}$.

Les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés des *arbres*. Pour $g, d \in \mathcal{A}$, on dit que g et d sont les *sous-arbres gauche* et *droit* de l'arbre $N(g, d)$.

Avec les notations précédentes, où l'on prend $E = \mathcal{A}$, $B = \{F\}$, $r = 1$, $k_1 = 2$ et $c_1 = N$, la propriété (A3) signifie que l'ensemble défini inductivement par l'atome F et le constructeur N est $\mathcal{A}$ lui-même, et les propriétés (A1) et (A2) signifient qu'il vérifie la propriété de lecture unique. On peut donc raisonner par induction sur $\mathcal{A}$ et y définir des applications par induction.

On représente F par un petit carré et l'arbre $N(g, d)$ par un disque, appelé sa *racine*, relié aux représentations de g (en bas à gauche) et de d (en bas à droite). Les carrés sont appelés les *feuilles* de l'arbre et les disques ses *nœuds internes*. Par exemple, la figure ci-dessous représente l'arbre $N(N(F, F), N(F, N(F, F)))$.



On définit par induction deux applications n et h de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{N}$ en posant $n(F) = 0$, $h(F) = 0$ et, pour tous $g, d \in \mathcal{A}$:

$$n(N(g, d)) = 1 + n(g) + n(d), \quad h(N(g, d)) = 1 + \max(h(g), h(d)).$$

Lorsque $a \in \mathcal{A}$, les entiers $n(a)$ et $h(a)$ s'appellent respectivement le nombre de nœuds internes et la *hauteur* de l'arbre a .

Montrer que, pour tout $a \in \mathcal{A}$, $h(a) \leq n(a) \leq 2^{h(a)} - 1$.