

DS 2 : un corrigé

Exercices (sur 11 points)

Exercice 1 (sur 3 points) :

1°) (sur 1 point)

Soient $p, q \in \mathbb{R}$: $\cos p + \cos q = \operatorname{Re}(e^{ip} + e^{iq}) = \operatorname{Re}\left(e^{i\frac{p+q}{2}}(e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{i\frac{q-p}{2}})\right)$, donc

$$\boxed{\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \times \operatorname{Re}(e^{i\frac{p-q}{2}}) = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}}.$$

2°) (sur 2 points)

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$(E) \iff 3 \cos(5x) = 2 \cos(9x) \cos(5x) \iff (\cos(5x) = 0) \vee (\cos(9x) = \frac{3}{2} > 1)$,

donc $(E) \iff \cos(5x) = 0 \iff 5x \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$,

donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions est } \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}\mathbb{Z}}$.

Exercice 2 (sur 5 points) :

1°) (sur 4 points) Notons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos^3(x)$. D'après les théorèmes usuels, f est de classe C^∞ , donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ est définie sur $\mathbb{R}$. Linéarisons $f(x)$ à l'aide des complexes : soit $x \in \mathbb{R}$.

$\cos^3(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3$, donc d'après la formule du binôme,

$$\cos^3(x) = \frac{1}{8}(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}) = \frac{1}{4}(\cos(3x) + 3\cos(x)).$$

On peut alors montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $R(n)$: pour tout

$$x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{f^{(n)}(x) = \frac{1}{4}(3^n \cos(3x + n\frac{\pi}{2}) + 3\cos(x + n\frac{\pi}{2}))}.$$

En effet, pour $n = 0$, $\frac{1}{4}(3^n \cos(3x + n\frac{\pi}{2}) + 3\cos(x + n\frac{\pi}{2})) = \frac{1}{4}(\cos(3x) + 3\cos(x)) = f(x)$, donc $R(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $R(n)$ est vraie.

D'après le cours, $\frac{d}{d\theta}(\cos(\theta)) = -\sin(\theta) = \cos(\theta + \frac{\pi}{2})$, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{4} (3^n \cos(3x + n\frac{\pi}{2}) + 3\cos(x + n\frac{\pi}{2})) \right) \\ &= \frac{1}{4} (3^{n+1} \cos(3x + (n+1)\frac{\pi}{2}) + 3\cos(x + (n+1)\frac{\pi}{2})), \end{aligned}$$

ce qui prouve $R(n+1)$.

2°) (sur 1 point)

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, notons $g(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$. Alors $g(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$, donc à nouveau par récurrence, on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$,

$$g^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}} + \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right).$$

Exercice 3 (sur 3 points) :

Le dénominateur est un trinôme dont le discriminant vaut $\Delta = 4 - 4 \times 9 < 0$, donc les primitives de $x \mapsto \frac{2x}{x^2 + 2x + 9}$ sont définies sur $\mathbb{R}$. Posons $I = \int \frac{2x}{x^2 + 2x + 9} dx$.

$$\text{Alors } I = \int \frac{(2x+2)-2}{x^2+2x+9} dx = \ln(x^2+2x+9) - 2 \int \frac{dx}{(x+1)^2+8},$$

$$\text{donc } I = \ln(x^2+2x+9) - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x+1}{2\sqrt{2}}\right) + k.$$

Problème 1 : volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$

Partie A : Intégrales de Wallis

$$1^\circ) \diamond W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \left[\frac{\pi}{2} \right] \text{ et } W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \, d\theta = \left[-\cos \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{1}.$$

$\diamond$ Soit $m \in \mathbb{N}$. La fonction $\theta \mapsto \sin^m \theta$ est continue et positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et elle n'est pas identiquement nulle. D'après le cours, son intégrale sur ce segment, dont les bornes sont dans l'ordre croissant, est strictement positive : $\boxed{W_m > 0}$.

$\diamond$ De même, $W_m - W_{m+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m \theta (1 - \sin \theta) \, d\theta$, où la fonction intégrée est continue, positive car $0 \leq \sin \theta \leq 1$, et non identiquement nulle, car elle vaut $\frac{1}{2^{m+1}}$ en $\frac{\pi}{6}$. Ainsi

$$\boxed{W_{m+1} < W_m}.$$

2°) $\diamond$ Soit $m \in \mathbb{N}$. Les fonctions $\theta \mapsto -\cos \theta$ et $\theta \mapsto \sin^{m+1} \theta$ sont de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; par intégration par parties,

$$\begin{aligned} W_{m+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \sin^{m+1} \theta \, d\theta \\ &= \left[-\cos \theta \sin^{m+1} \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (m+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin^m \theta \, d\theta \\ &= (m+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \theta) \sin^m \theta \, d\theta = (m+1)(W_m - W_{m+2}). \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } (m+2)W_{m+2} = (m+1)W_m, \text{ c'est-à-dire } \boxed{W_{m+2} = \frac{m+1}{m+2} W_m}.$$

◇ On en déduit successivement : $\boxed{W_2 = \frac{\pi}{4}}$, $\boxed{W_3 = \frac{2}{3}}$, $\boxed{W_4 = \frac{3}{4} \times \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{16}}$,
 $\boxed{W_5 = \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}}$, $\boxed{W_6 = \frac{5}{6} \times \frac{3\pi}{16} = \frac{5\pi}{32}}$.

3°) Pour $m \in \mathbb{N}$, posons $u_m = (m+1)W_{m+1}W_m$. D'après la question 2, appliquée au rang m , $u_{m+1} = (m+2)W_{m+2}W_{m+1} = (m+1)W_mW_{m+1} = u_m$.

La suite $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est donc constante, égale à $u_0 = W_1W_0 = \frac{\pi}{2}$:

$$\boxed{(m+1)W_{m+1}W_m = \frac{\pi}{2} \text{ pour tout } m \in \mathbb{N}}.$$

Partie B : Découpage de la boule unité en tubes

4°) ◇ Pour $x \in \mathbb{R}$, $\|x\| = \sqrt{x^2} = |x|$, donc $B_1(1) = [-1, 1]$ et, d'après (V3), $\boxed{V_1 = 2}$.

◇ Soit $r > 0$. Montrons par double inclusion que $B_{n-1}(r) = r B_{n-1}(1)$.

Soit $x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in r B_{n-1}(1)$. Il existe $y = (y_1, \dots, y_{n-1}) \in B_{n-1}(1)$ tel que

$$x = ry. \text{ Alors } \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (ry_i)^2 = r^2 \|y\|^2 \leq r^2, \text{ car } y \in B_{n-1}(1), \text{ donc } x \in B_{n-1}(r).$$

Réciproquement, soit $x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in B_{n-1}(r)$. r étant non nul, on peut poser $y = \frac{1}{r}x$. On vérifie alors que $\|y\| = \frac{1}{r}\|x\| \leq \frac{1}{r}r = 1$, donc $y \in B_{n-1}(1)$,

puis $x = ry \in r B_{n-1}(1)$.

Ainsi, $B_{n-1}(r) = r B_{n-1}(1)$ et, d'après (V5), $\boxed{\text{vol}_{n-1}(B_{n-1}(r)) = r^{n-1}V_{n-1}}$.

◇ Pour $k = 1$, on a donc $\text{vol}_{n-1}(C_1) = V_{n-1}r_1^{n-1}$. De plus, $r_0 = 0$ et $n-1 \geq 1$, donc $a_1 = r_1^{n-1}$. Ainsi, $\text{vol}_{n-1}(C_1) = V_{n-1}a_1$.

Pour $k \in \{2, \dots, N\}$: comme $r_{k-1} < r_k$, $B_{n-1}(r_{k-1}) \subset B_{n-1}(r_k)$, donc $B_{n-1}(r_k)$ est la réunion disjointe de $B_{n-1}(r_{k-1})$ et de C_k . D'après (V2),

$$\text{vol}_{n-1}(C_k) = \text{vol}_{n-1}(B_{n-1}(r_k)) - \text{vol}_{n-1}(B_{n-1}(r_{k-1})) = V_{n-1}(r_k^{n-1} - r_{k-1}^{n-1}).$$

Ainsi, $\boxed{\text{vol}_{n-1}(C_k) = V_{n-1}a_k \text{ pour tout } k \in \{1, \dots, N\}}$.

5°) 5.a) ◇ Soit $h, k \in \mathbb{N}_N$ avec $h < k$. Soit $(y, t) \in P_h \cap P_k$, où $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $t \in \mathbb{R}$. Alors $y \in C_h \cap C_k$. Or $k \geq 2$, donc $y \notin B_{n-1}(r_{k-1})$.

On a donc $\|y\| \leq r_h \leq r_{k-1} < \|y\|$. C'est impossible, donc $P_h \cap P_k = \emptyset$. Ainsi, on a montré que les parties $P_1, \dots, P_N$ sont deux à deux disjointes.

◇ Soit $x = (y, t) \in B_n(1)$, où $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $t \in \mathbb{R}$. Alors $1 \geq \|(y, t)\|^2 = \|y\|^2 + t^2$, donc $\|y\|^2 \leq 1$, puis $0 \leq \|y\| \leq 1$.

Si $\|y\| \leq \frac{1}{N} = r_1$, alors $y \in C_1$ puis $x \in P_1$.

Sinon, $\|y\| \in \left] \frac{1}{N}, 1 \right] = \bigcup_{1 \leq k \leq N-1} \left] \frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right]$, donc il existe $k \in \mathbb{N}_{N-1}$

tel que $r_k < \|y\| \leq r_{k+1}$. Alors $y \in C_{k+1}$ puis $x \in P_{k+1}$.

Ceci prouve que $B_n(1) \subset \bigcup_{1 \leq k \leq N} P_k$. L'inclusion réciproque est évidente car, par définition,

tous les P_k sont inclus dans $B_n(1)$.

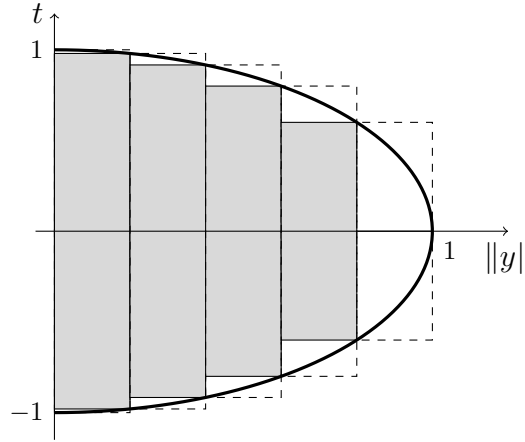
5.b) Soit $y \in C_k$. On a $\|y\| \leq r_k$; de plus, $\|y\| \geq r_{k-1}$, car $r_0 = 0$ lorsque $k = 1$, et $y \notin B_{n-1}(r_{k-1})$ lorsque $k \geq 2$.

◇ Soit $(y, t) \in C_k \times [-g(r_k), g(r_k)]$. Alors $\|y\|^2 + t^2 \leq r_k^2 + g(r_k)^2 = 1$, donc $(y, t) \in B_n(1)$ et, comme $y \in C_k$, $(y, t) \in P_k$.

◇ Soit $(y, t) \in P_k$. Alors $y \in C_k$ et $t^2 \leq 1 - \|y\|^2 \leq 1 - r_{k-1}^2$, donc $|t| \leq g(r_{k-1})$, c'est-à-dire $(y, t) \in C_k \times [-g(r_{k-1}), g(r_{k-1})]$.

Ainsi, $\boxed{C_k \times [-g(r_k), g(r_k)] \subset P_k \subset C_k \times [-g(r_{k-1}), g(r_{k-1})]}$.

La figure ci-dessous représente, pour $N = 5$, la coupe de la situation dans le demi-plan des $(\|y\|, t)$: le demi-disque correspond à $B_n(1)$, les rectangles grisés aux tubes contenus dans les P_k , et les rectangles en pointillé aux tubes qui les contiennent.



5.c) D'après la question 5.a et (V2), $V_n = \sum_{k=1}^N \text{vol}_n(P_k)$.

Soit $k \in \mathbb{N}_N$. D'après la question 5.b et (V1),

$\text{vol}_n(C_k \times [-g(r_k), g(r_k)]) \leq \text{vol}_n(P_k) \leq \text{vol}_n(C_k \times [-g(r_{k-1}), g(r_{k-1})])$, donc d'après (V4) et la question 4, $2g(r_k)V_{n-1}a_k \leq \text{vol}_n(P_k) \leq 2g(r_{k-1})V_{n-1}a_k$.

En sommant ces encadrements, on obtient donc bien $s_N \leq V_n \leq S_N$.

6°) Soit $k \in \{1, \dots, N\}$. La fonction g est décroissante sur $[0, 1]$, donc, pour tout $r \in [r_{k-1}, r_k]$, $g(r_k) \leq g(r) \leq g(r_{k-1})$. En multipliant par $2(n-1)r^{n-2} \geq 0$, puis en intégrant sur $[r_{k-1}, r_k]$ (bornes dans l'ordre croissant), la croissance de l'intégrale donne

$$2g(r_k) \int_{r_{k-1}}^{r_k} (n-1)r^{n-2} dr \leq \int_{r_{k-1}}^{r_k} 2(n-1)r^{n-2}g(r) dr \leq 2g(r_{k-1}) \int_{r_{k-1}}^{r_k} (n-1)r^{n-2} dr.$$

Or $\int_{r_{k-1}}^{r_k} (n-1)r^{n-2} dr = \left[r^{n-1} \right]_{r_{k-1}}^{r_k} = a_k$. En sommant pour k variant de 1 à N , la

relation de Chasles donne $2 \sum_{k=1}^N g(r_k)a_k \leq J_n \leq 2 \sum_{k=1}^N g(r_{k-1})a_k$, puis, en multipliant

par $V_{n-1} \geq 0$, $\boxed{s_N \leq V_{n-1}J_n \leq S_N}$.

7°) Soit $k \in \mathbb{N}_N$. $a_k = r_k^{n-1} - r_{k-1}^{n-1} = \int_{r_{k-1}}^{r_k} (n-1)t^{n-2} dt$, or $[r_{k-1}, r_k] \subset [0, 1]$, donc

$a_k \leq \int_{r_{k-1}}^{r_k} (n-1) dt$, puis $a_k \leq (n-1)(r_k - r_{k-1}) = \frac{n-1}{N}$. On en déduit que

$$\begin{aligned} S_N - s_N &= 2V_{n-1} \sum_{k=1}^N (g(r_{k-1}) - g(r_k))a_k \\ &\leq \frac{2(n-1)V_{n-1}}{N} \sum_{k=1}^N (g(r_{k-1}) - g(r_k)) \quad (\text{car } g(r_{k-1}) - g(r_k) \geq 0) \\ &= \frac{2(n-1)V_{n-1}}{N} (g(r_0) - g(r_N)) \quad (\text{par télescopage}) \\ &= \frac{2(n-1)V_{n-1}}{N} (g(0) - g(1)). \end{aligned}$$

Or $g(0) = 1$ et $g(1) = 0$, donc $\boxed{S_N - s_N \leq \frac{2(n-1)V_{n-1}}{N}}$.

◇ D'après 5.c et 6, les réels V_n et $V_{n-1}J_n$ appartiennent tous deux au segment $[s_N, S_N]$, donc

$$|V_n - V_{n-1}J_n| \leq S_N - s_N \leq \frac{2(n-1)V_{n-1}}{N}.$$

Le membre de gauche ne dépend pas de N , et cette inégalité est vraie pour tout $N \in \mathbb{N}^*$. En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient $|V_n - V_{n-1}J_n| \leq 0$, d'où $\boxed{V_n = V_{n-1}J_n}$.

Partie C : Calcul de V_n

8°) ◇ Dans l'expression intégrale de J_n , posons $r = \sin \theta$, ce qui est possible car $\theta \mapsto \sin \theta$ est de classe C^1 . On obtient $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(n-1) \sin^{n-2} \theta \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \cos \theta d\theta$.

Pour tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos \theta \geq 0$, donc $\sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \cos \theta$. Ainsi,

$$J_n = 2(n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} \theta (1 - \sin^2 \theta) d\theta, \text{ donc } \boxed{J_n = 2(n-1)(W_{n-2} - W_n)}.$$

◇ D'après la question 2, appliquée avec $m = n-2$, $nW_n = (n-1)W_{n-2}$, donc $(n-1)W_{n-2} - (n-1)W_n = nW_n - (n-1)W_n = W_n$. On a prouvé que $\boxed{J_n = 2W_n}$.

◇ D'après la partie B, $V_2 = 2W_2V_1 = 2 \times \frac{\pi}{4} \times 2$, donc $\boxed{V_2 = \pi}$.

De même, $V_3 = 2W_3V_2 = 2 \times \frac{2}{3} \times \pi$, donc $\boxed{V_3 = \frac{4\pi}{3}}$.

On retrouve bien l'aire du disque de rayon 1 et le volume de la boule de rayon 1 de l'espace.

9°) ◇ Soit $n \geq 3$. En appliquant les questions 7 et 8 aux rangs n et $n-1 \geq 2$, on obtient $V_n = 2W_nV_{n-1} = 4W_nW_{n-1}V_{n-2} = \frac{4}{n} \times nW_nW_{n-1}V_{n-2}$. Alors, d'après la question 3,

$$V_n = \frac{4}{n} \times \frac{\pi}{2} V_{n-2}, \quad \text{donc} \quad \boxed{V_n = \frac{2\pi}{n} V_{n-2}}.$$

◇ Soit $p \in \mathbb{N}^*$. À partir de la relation précédente, on montre facilement par récurrence

sur p que $V_{2p} = V_2 \prod_{n=2}^p \frac{2\pi}{2n}$, donc $V_{2p} = \pi \frac{\pi^{p-1}}{p!}$. Ainsi, $\boxed{V_{2p} = \frac{\pi^p}{p!} \text{ pour tout } p \in \mathbb{N}^*}$.

◇ Soit $p \in \mathbb{N}^*$. De même, on obtient par récurrence que $V_{2p-1} = V_1 \prod_{n=2}^p \frac{2\pi}{2n-1}$, donc

$$V_{2p-1} = 2(2\pi)^{p-1} \frac{\prod_{n=1}^p 2n}{\left(\prod_{n=1}^p 2n\right) \left(\prod_{n=2}^p (2n-1)\right)} = 2^p \pi^{p-1} \frac{2^p (p!)}{(2p)!}.$$

Ainsi, $\boxed{V_{2p-1} = 2^{2p} \pi^{p-1} \frac{p!}{(2p)!}}$.

◇ En particulier, $\boxed{V_4 = \frac{\pi^2}{2}}$, $V_5 = 2^6 \pi^2 \frac{3!}{6!} = \pi^2 \frac{2^3}{5 \times 3}$, donc $\boxed{V_5 = \frac{8\pi^2}{15}}$, et $\boxed{V_6 = \frac{\pi^3}{6}}$.

10°) 10.a) D'après les questions 1 et 8, pour tout $n \geq 2$, $J_n = 2W_n > 0$. Alors la relation de la question 7 permet facilement de montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n > 0$.

On peut donc écrire, pour tout $n \geq 2$, que $\frac{V_n}{V_{n-1}} = 2W_n$.

D'après la question 1, la suite $(2W_n)$ est strictement décroissante. Or $2W_5 = \frac{16}{15} > 1$, donc pour $n \in \{2, 3, 4, 5\}$, $2W_n \geq 2W_5 > 1$, ce qui prouve que $V_n > V_{n-1}$. Ainsi, $V_1 < V_2 < V_3 < V_4 < V_5$.

Par ailleurs, on admet que $\pi < 3,2 = \frac{16}{5}$, donc $2W_6 = \frac{10\pi}{32} < \frac{10}{32} \times \frac{16}{5} = 1$.

Ainsi, pour $n \geq 6$, $2W_n \leq 2W_6 < 1$, donc $V_n < V_{n-1}$: la suite $(V_n)_{n \geq 5}$ est strictement décroissante.

Ceci prouve que la valeur maximale de V_n est $V_5 = \frac{8\pi^2}{15}$, atteinte uniquement pour $n = 5$.

10.b) $(V_n)_{n \geq 5}$ est décroissante et minorée par 0, donc il existe $\ell \in \mathbb{R}_+$ tel que $V_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.

Alors $V_n = \frac{2\pi}{n} V_{n-2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \times \ell = 0$.

Problème 2 : induction structurelle

1°) 1.a) $c(Y^2) = \{0 + 0, 0 + 1, 1 + 0, 1 + 1\}$, donc $\boxed{c(Y^2) = \{0, 1, 2\}}$.

1.b) $\diamond$ Pour tous $x, y \in \mathbb{N}$, $x - y \in \mathbb{Z}$, donc $c(\mathbb{N}^2) \subset \mathbb{Z}$.

$\diamond$ Soit $m \in \mathbb{Z}$. Si $m \geq 0$, alors $m = m - 0 = c(m, 0)$ avec $(m, 0) \in \mathbb{N}^2$; si $m < 0$, alors $m = 0 - (-m) = c(0, -m)$ avec $(0, -m) \in \mathbb{N}^2$. Ainsi $\mathbb{Z} \subset c(\mathbb{N}^2)$, donc $\boxed{c(\mathbb{N}^2) = \mathbb{Z}}$.

Dans les deux cas, $c(Y^2)$ n'est pas inclus dans Y , donc $\boxed{Y \text{ n'est pas stable par } c}$.

2°) 2.a) $\diamond B \subset E$ et, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, c_i est à valeurs dans E , donc E est une partie stable de E contenant B : $E \in \mathcal{S}$, donc $\boxed{\mathcal{S} \neq \emptyset}$.

$\diamond$ Un objet appartient à l'intersection d'une famille d'ensembles lorsqu'il appartient à chacun des ensembles de la famille. Si la famille était vide, cette condition serait satisfaite par n'importe quel objet : l'intersection « contiendrait tout », ce qui n'a pas de sens (ce n'est pas un ensemble). Comme $\mathcal{S}$ n'est pas vide, X est bien défini, et c'est une partie de E , puisque $E \in \mathcal{S}$: $\boxed{X \text{ est correctement défini}}$.

2.b) Posons $Z = \bigcap_{j \in J} Y_j$. Soit $i \in \mathbb{N}_r$.

Soit $z \in Z^{k_i}$. Soit $j \in J$. $Z \subset Y_j$, donc $z \in Y_j^{k_i}$.

Y_j étant stable, Y_j est stable par c_i , donc $c_i(z) \in Y_j$, pour tout $j \in J$. Ainsi, $c_i(z) \in Z$. Ceci démontre que Z est stable par c_i , pour tout $i \in \mathbb{N}_r$, donc que Z est une partie stable.

2.c) $\diamond$ D'après 2.a, X est l'intersection d'une famille non vide de parties stables, donc d'après 2.b, X est stable. De plus, $B \subset Y$ pour tout $Y \in \mathcal{S}$, donc $B \subset X$. Ainsi $X \in \mathcal{S}$.

$\diamond$ Soit Y une partie stable de E contenant B . Alors $Y \in \mathcal{S}$.

Or lorsque $x \in E$, $x \in X \iff [\forall Z \in \mathcal{S}, x \in Z]$, donc $x \in X \implies x \in Y$, ce qui prouve que $X \subset Y$. On a prouvé qu'au sens de l'inclusion, X est la plus petite partie stable de E contenant B .

3°) Principe d'induction structurelle

3.a) • Remarquons d'abord que (i) est correctement définie car $B \subset X$ et que (ii) est correctement définie car X est une partie stable de E .

• Notons $Y = \{x \in X \mid \mathcal{P}(x) \text{ est vraie}\}$.

$\diamond$ D'après 2.c, $B \subset X$, et d'après (i), $\mathcal{P}(b)$ est vraie pour tout $b \in B$, donc $B \subset Y$.

$\diamond$ Soient $i \in \{1, \dots, r\}$ et $(y_1, \dots, y_{k_i}) \in Y^{k_i}$. Les y_j appartiennent à X , qui est stable, donc $c_i(y_1, \dots, y_{k_i}) \in X$. De plus, $\mathcal{P}(y_1), \dots, \mathcal{P}(y_{k_i})$ sont vraies, donc, d'après (ii), $\mathcal{P}(c_i(y_1, \dots, y_{k_i}))$ est vraie. Ainsi, $c_i(y_1, \dots, y_{k_i}) \in Y$: Y est stable.

Par conséquent, $Y \in \mathcal{S}$, donc $X \subset Y$ d'après 2.c. Comme $Y \subset X$ par définition, $Y = X$, c'est-à-dire que $\boxed{\mathcal{P}(x) \text{ est vraie pour tout } x \in X}$.

3.b) Par définition, $X \subset E = \mathbb{N}$. Montrons par récurrence sur n que $n \in X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a $0 \in B \subset X$; si $n \in X$, alors $n + 1 = c_1(n)$ $\in X$ car X est stable. D'après le principe de récurrence, $\mathbb{N} \subset X$, donc $\boxed{X = \mathbb{N}}$.

Le principe d'induction structurelle s'écrit alors : si $\mathcal{P}(0)$ est vraie et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ implique $\mathcal{P}(n + 1)$, alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

c'est le principe de récurrence

 .

4°) Un exemple : les formules propositionnelles

4.a) Notons $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge, \vee, \implies, \iff, (,)\}$.

On suppose que $\mathcal{C} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ et on pose $\mathcal{A} = \mathcal{C} \sqcup \mathcal{V}$.

On prend pour E l'ensemble des mots écrits sur l'alphabet $\mathcal{A}$,

c'est-à-dire que l'on pose $E = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{A}^n$.

Lorsque $m = (a_1, \dots, a_n) \in E$, où $n \in \mathbb{N}^*$, on écrit plutôt m sous la forme

$m = a_1 a_2 \dots a_n$: c'est le mot dont les lettres sont $a_1, \dots, a_n$.

On choisit $B = \mathcal{V}$ et l'on définit $r = 5$ constructeurs :

- $c_1 : E \rightarrow E$ ($k_1 = 1$), qui à tout mot u associe le mot $\neg u$;
- $c_2 : E^2 \rightarrow E$ ($k_2 = 2$), qui à tout couple de mots (u, v) associe le mot $(u \wedge v)$, obtenu en concaténant la lettre $($, le mot u , la lettre $\wedge$, le mot v et la lettre $)$;
- c_3, c_4 et c_5 ($k_3 = k_4 = k_5 = 2$), qui à (u, v) associent de même les mots $(u \vee v)$, $(u \implies v)$ et $(u \iff v)$.

L'ensemble X défini inductivement par ces atomes et ces constructeurs, c'est-à-dire la plus petite partie de E contenant les variables et stable par les cinq constructeurs, est exactement ce que le cours a appelé l'ensemble $\mathcal{F}$ des formules propositionnelles écrites avec les variables de $\mathcal{V}$.

4.b) $\diamond$ $\mathcal{F}$ contient $\mathcal{V}$ et est stable par les constructeurs c_2 et c_3 (question 2.c). D'après 2.c appliquée à $\mathcal{F}^+$, qui est la plus petite partie de E contenant $\mathcal{V}$ et stable par c_2 et c_3 , on a $\boxed{\mathcal{F}^+ \subset \mathcal{F}}$. En particulier, $v(\varphi)$ est défini pour tout $\varphi \in \mathcal{F}^+$.

$\diamond$ Pour $\varphi \in \mathcal{F}^+$, notons $\mathcal{P}(\varphi)$ l'assertion :

« pour toutes divv v, w telles que $v \leq w$, $v(\varphi) \leq w(\varphi)$ ».

On raisonne par induction sur $\mathcal{F}^+$ (atomes : $\mathcal{V}$; constructeurs : c_2 et c_3).

Si $p \in \mathcal{V}$, pour toutes divv v, w telles que $v \leq w$, on a bien $v(p) \leq w(p)$.

Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^+$ tels que $\mathcal{P}(\varphi)$ et $\mathcal{P}(\psi)$ soient vraies, et soient v et w deux divv telles que $v \leq w$. Alors $v(\varphi) \leq w(\varphi)$ et $v(\psi) \leq w(\psi)$.

$v((\varphi \wedge \psi)) = \min(v(\varphi), v(\psi))$, donc $v((\varphi \wedge \psi)) \leq v(\varphi) \leq w(\varphi)$ et de même,

$v((\varphi \wedge \psi)) \leq w(\psi)$. Ainsi, $v((\varphi \wedge \psi)) \leq \min(w(\varphi), w(\psi)) = w((\varphi \wedge \psi))$.

On a ainsi montré $\mathcal{P}((\varphi \wedge \psi))$.

De même, $v((\varphi \vee \psi)) = \max(v(\varphi), v(\psi))$, or $v(\varphi) \leq w(\varphi) \leq \max(w(\varphi), w(\psi))$ et $v(\psi) \leq w(\psi) \leq \max(w(\varphi), w(\psi))$, donc $v((\varphi \vee \psi)) \leq \max(w(\varphi), w(\psi)) = w((\varphi \vee \psi))$.

On a ainsi montré $\mathcal{P}((\varphi \vee \psi))$.

Ainsi, on a montré par induction sur $\mathcal{F}^+$ que pour toute formule $\varphi \in \mathcal{F}^+$ et toutes divv v, w telles que $v \leq w$, on a $v(\varphi) \leq w(\varphi)$.

4.c) Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une formule $\varphi \in \mathcal{F}^+$ qui soit logiquement équivalente à $\neg p$.

Notons v_0 et v_1 les divv constantes égales à 0 et à 1, ce qui signifie que, pour tout $q \in \mathcal{V}$, $v_0(q) = 0$ et $v_1(q) = 1$. On a $v_0 \leq v_1$.

Alors $1 = v_0(\neg p) = v_0(\varphi)$, donc d'après la question précédente, $1 \leq v_1(\varphi) = v_1(\neg p) = 0$, ce qui est faux.

On a ainsi montré que la négation ne peut pas s'exprimer à l'aide des seuls connecteurs $\wedge$ et $\vee$.

5°) Notons $Z = B \cup c_1(X^{k_1}) \cup \dots \cup c_r(X^{k_r})$.

◇ $B \subset X$ et, X étant stable, $c_i(X^{k_i}) \subset X$ pour tout i , donc $Z \subset X$.

◇ Z contient B .

◇ Soient $i \in \{1, \dots, r\}$ et $(z_1, \dots, z_{k_i}) \in Z^{k_i}$. Comme $Z \subset X$, $(z_1, \dots, z_{k_i}) \in X^{k_i}$, donc $c_i(z_1, \dots, z_{k_i}) \in c_i(X^{k_i}) \subset Z$. Ainsi Z est stable, donc $Z \in \mathcal{S}$, puis $X \subset Z$ d'après 2.c.

Finalement, $\boxed{X = B \cup c_1(X^{k_1}) \cup \dots \cup c_r(X^{k_r})}$.

6°) Description « par le bas »

6.a) ◇ Par définition de X_{n+1} , on a $\boxed{X_n \subset X_{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

◇ Montrons par récurrence sur n que $X_n \subset X$. On a $X_0 = B \subset X$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $X_n \subset X$. Pour tout i , $(X_n)^{k_i} \subset X^{k_i}$, donc $c_i((X_n)^{k_i}) \subset c_i(X^{k_i}) \subset X$ car X est stable. Ainsi $X_{n+1} \subset X$. D'après le principe de récurrence, $\boxed{X_n \subset X \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$.

6.b) Notons $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$. D'après 6.a, $U \subset X$.

Réciproquement, $B = X_0 \subset U$. Soient $i \in \{1, \dots, r\}$ et $(u_1, \dots, u_{k_i}) \in U^{k_i}$. Pour tout $j \in \{1, \dots, k_i\}$, il existe $n_j \in \mathbb{N}$ tel que $u_j \in X_{n_j}$. Posons $m = \max(n_1, \dots, n_{k_i})$. La suite (X_n) étant croissante pour l'inclusion d'après 6.a, $u_j \in X_{n_j} \subset X_m$ pour tout j , donc $c_i(u_1, \dots, u_{k_i}) \in c_i((X_m)^{k_i}) \subset X_{m+1} \subset U$. Ainsi U est stable et contient B , donc $X \subset U$ d'après 2.c.

Finalement, $\boxed{X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n}$.

6.c) Supposons (i) et (ii). Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $R(n)$ l'assertion : « $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tout $x \in X_n$ ».

$R(0)$ est vraie d'après (i), car $X_0 = B$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $R(n)$ soit vraie, et soit $x \in X_{n+1}$. Si $x \in X_n$, $\mathcal{P}(x)$ est vraie par hypothèse de récurrence. Sinon, il existe $i \in \{1, \dots, r\}$ et $(x_1, \dots, x_{k_i}) \in (X_n)^{k_i}$ tels que $x = c_i(x_1, \dots, x_{k_i})$; les x_j appartiennent à X d'après 6.a, et $\mathcal{P}(x_1), \dots, \mathcal{P}(x_{k_i})$ sont vraies d'après $R(n)$, donc $\mathcal{P}(x)$ est vraie d'après (ii). Ainsi $R(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, $R(n)$ est vraie pour tout n . Enfin, si $x \in X$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in X_n$ d'après 6.b, donc $\boxed{\mathcal{P}(x) \text{ est vraie}}$.

Remarque. Une induction structurale n'est donc qu'une récurrence sur le « nombre d'étapes de construction » des éléments de X .

7°) ◇ D'après 3.b, $X = \mathbb{N}$. L'application $c_1 : n \mapsto n+1$ est injective sur $\mathbb{N}$, et $B = \{0\}$ est disjoint de $c_1(\mathbb{N}) = \mathbb{N}^*$: $\boxed{X \text{ vérifie la propriété de lecture unique}}$.

◇ Soient Ω un ensemble, $a \in \Omega$ et $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega$ une application. Appliquons le théorème avec $\beta(0) = a$ et $\gamma_1 = \varphi$: il existe une unique application $\theta : \mathbb{N} \rightarrow \Omega$ telle que $\theta(0) = a$ et $\theta(n+1) = \varphi(\theta(n))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En notant $u_n = \theta(n)$, on obtient : il existe une unique suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de Ω telle que $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

C'est le théorème de définition d'une suite par récurrence.

8°) Soient $\theta, \theta' : X \rightarrow \Omega$ deux applications vérifiant les propriétés du théorème. Pour $x \in X$, notons $\mathcal{P}(x)$ l'assertion : $\ll \theta(x) = \theta'(x) \gg$.

◇ Pour tout $b \in B$, $\theta(b) = \beta(b) = \theta'(b)$.

◇ Soient $i \in \{1, \dots, r\}$ et $(x_1, \dots, x_{k_i}) \in X^{k_i}$ tels que $\theta(x_j) = \theta'(x_j)$ pour tout j . Alors $\theta(c_i(x_1, \dots, x_{k_i})) = \gamma_i(\theta(x_1), \dots, \theta(x_{k_i})) = \gamma_i(\theta'(x_1), \dots, \theta'(x_{k_i})) = \theta'(c_i(x_1, \dots, x_{k_i}))$.

D'après le principe d'induction structurelle, $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tout $x \in X$, donc $\boxed{\theta = \theta'}$.

On remarquera que la propriété de lecture unique n'a pas servi : elle n'est utile que pour l'existence.

9°) Un exemple : les rationnels strictement positifs

9.a) $1 \in \mathbb{Q}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{Q}_+^*$, $c_1(x) = x + 1 \in \mathbb{Q}_+^*$ et $c_2(x) = \frac{1}{x} \in \mathbb{Q}_+^*$: ainsi $\mathbb{Q}_+^*$ est une partie stable de $\mathbb{R}$ contenant B , donc $\boxed{X \subset \mathbb{Q}_+^*}$ d'après 2.c.

9.b) Initialisation : on suppose que $s = 2$. Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $p + q = 2$. Alors $p = q = 1$, donc $\frac{p}{q} = 1 \in B \subset X$. Ceci prouve $H(2)$.

Hérédité : soit $s \geq 3$ un entier tel que $H(t)$ soit vraie pour tout entier t tel que $2 \leq t < s$.

Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $p + q = s$.

◇ Si $p = q$, alors $\frac{p}{q} = 1 \in B \subset X$.

◇ Si $p > q$, alors $p - q \in \mathbb{N}^*$ et $(p - q) + q = p$, avec $2 \leq p < s$ car $p > q \geq 1$. D'après $H(p)$, $\frac{p - q}{q} \in X$, donc, X étant stable, $\frac{p}{q} = \frac{p - q}{q} + 1 = c_1\left(\frac{p - q}{q}\right) \in X$.

◇ Si $p < q$, le cas précédent, appliqué au couple (q, p) , qui vérifie $q > p$ et $q + p = s$, donne $\frac{q}{p} \in X$, donc $\frac{p}{q} = c_2\left(\frac{q}{p}\right) \in X$.

Ainsi $H(s)$ est vraie. D'après le principe de récurrence forte, $\boxed{\forall s \geq 2, H(s)}$.

Tout élément de $\mathbb{Q}_+^*$ s'écrit $\frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$, et appartient donc à X d'après $H(p + q)$.

Ainsi $\mathbb{Q}_+^* \subset X$ et, avec 9.a, $\boxed{X = \mathbb{Q}_+^*}$.

9.c) ◇ $1 \in B$ et $1 = c_2(1) \in c_2(X)$, donc B et $c_2(X)$ ne sont pas disjoints :

$\boxed{X \text{ ne vérifie pas la propriété de lecture unique}}$.

De même, $2 = c_1(1) = c_2\left(\frac{1}{2}\right)$ appartient à $c_1(X) \cap c_2(X)$.

◇ Supposons qu'une telle application θ existe. D'après 9.b, 1, 2 et $\frac{1}{2}$ appartiennent à X . Alors : $\theta(2) = \theta(1 + 1) = \theta(1) + 1 = 1$; puis, comme $2 \neq 1$, $\theta\left(\frac{1}{2}\right) = \theta(2) + 1 = 2$; enfin, comme $\frac{1}{2} \neq 1$, $\theta(2) = \theta\left(\frac{1}{1/2}\right) = \theta\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 3$, ce qui est absurde.

Ainsi, aucune application θ ne vérifie ces conditions.

Intuitivement, $\theta(x)$ devrait compter le nombre d'étapes de construction de x , mais ce nombre dépend de la façon dont on construit x : sans lecture unique, une « définition par induction » peut être contradictoire.

10°) D'après (A3), on peut raisonner par induction sur $\mathcal{A}$.

Pour $a \in \mathcal{A}$, notons $\mathcal{P}(a)$ l'assertion : $\ll h(a) \leq n(a) \leq 2^{h(a)} - 1 \gg$.

◇ $h(F) = 0$, $n(F) = 0$ et $2^{h(F)} - 1 = 0$, donc $\mathcal{P}(F)$ est vraie.

◇ Soient $g, d \in \mathcal{A}$ tels que $\mathcal{P}(g)$ et $\mathcal{P}(d)$ soient vraies. Posons $a = N(g, d)$.

Notons $m = \max(h(g), h(d))$, de sorte que $h(a) = 1 + m$.

Comme $n(g)$ et $n(d)$ sont positifs, $m \leq \max(n(g), n(d)) \leq n(g) + n(d)$,

donc $h(a) \leq 1 + n(g) + n(d) = n(a)$.

D'autre part, $n(g) \leq 2^{h(g)} - 1 \leq 2^m - 1$ et de même $n(d) \leq 2^m - 1$, donc

$n(a) = 1 + n(g) + n(d) \leq 1 + 2(2^m - 1) = 2^{m+1} - 1 = 2^{h(a)} - 1$.

Ainsi $\mathcal{P}(a)$ est vraie. Par induction sur $\mathcal{A}$, $\boxed{\forall a \in \mathcal{A}, h(a) \leq n(a) \leq 2^{h(a)} - 1}$.