

Feuille d'exercices 5.

Corrigé de l'exercice 14.

Exercice 5.14 :

Soit $x, y \in \mathbb{Q}$ tels que $x^2 + y^2 = 3$.

Quitte à remplacer x par $-x$ ou y par $-y$, on peut supposer que $x, y \in \mathbb{Q}_+$.

Il existe $a, c \in \mathbb{N}$ et $b, d \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{c}{d}$.

Ainsi, $x = \frac{p}{r}$ et $y = \frac{q}{r}$, en posant $r = bd \in \mathbb{N}^*$, $p = ad \in \mathbb{N}$ et $q = bc \in \mathbb{N}$.

On a donc $p^2 + q^2 = 3r^2$.

Travaillons modulo 3 : $p^2 + q^2 \equiv 0 \pmod{3}$.

Lorsque n est respectivement congru à -1 , 0 et 1 ,

alors n^2 est respectivement congru à 1 , 0 et 1 .

Supposons que p n'est pas un multiple de 3. Alors $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$, donc $p^2 + q^2$ est congru modulo 3 à 1 ou 2, ce qui est impossible.

Ainsi, 3 divise p et, par symétrie, 3 divise également q .

Alors 9 divise $p^2 + q^2 = 3r^2$, donc 3 divise r^2 , or 3 est premier, donc 3 divise r .

Ainsi, en utilisant seulement que $p^2 + q^2 = 3r^2$, on a montré que 3 est un diviseur commun de p , q et r .

Alors, $\frac{p}{3}$, $\frac{q}{3}$ et $\frac{r}{3}$ sont des entiers tels que $\left(\frac{p}{3}\right)^2 + \left(\frac{q}{3}\right)^2 = 3\left(\frac{r}{3}\right)^2$. Par récurrence, on en déduit aisément que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 3^n est un diviseur commun de p , q et r et que $\left(\frac{p}{3^n}\right)^2 + \left(\frac{q}{3^n}\right)^2 = 3\left(\frac{r}{3^n}\right)^2$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 3^n divise r , ce qui est faux dès que $n > v_3(r)$ (r est non nul).

L'existence de $x, y \in \mathbb{Q}$ tels que $x^2 + y^2 = 3$ mène ainsi à une contradiction, donc aucun couple (x, y) de rationnels ne vérifie la condition $x^2 + y^2 = 3$.

Géométriquement, cela signifie que le cercle de centre 0 et de rayon $\sqrt{3}$ ne rencontre aucun point à coordonnées rationnelles.