Résumé de cours :
Semaine 8, du 2 au 6 novembre.

# 1 Applications (suite et fin)

## 1.1 Images directes et réciproques (fin)

**Propriété.** Avec les notations de la propriété précédente,
$A \subset f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(B)) \subset B$, mais les inclusions réciproques peuvent être fausses.
Il faut savoir le démontrer.

## 1.2 Injectivité et surjectivité

**Définition.** Soit $f : E \longrightarrow F$. $f$ est injective si et seulement si $\forall x, y \in E,\ [f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y]$, c'est-à-dire si et seulement si, pour tout couple d'éléments distincts de $E$, leurs images sont différentes, ou encore si et seulement si tout élément de $F$ possède au plus un antécédent.

**Définition.** Soit $f : E \longrightarrow F$. $f$ est surjective si et seulement si $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)$, c'est-à-dire si et seulement si $f(E) = F$, ou encore si et seulement si tout élément de $F$ possède au moins un antécédent.

**Définition.** On dit que $f$ est bijective si et seulement si $f$ est injective et surjective, c'est-à-dire si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée possède un unique antécédent dans l'ensemble de départ.

**Propriété.** Soit $f$ une application de $E$ dans $F$. Sur $E$, on définit la relation binaire $R$ par : $xRy \Longleftrightarrow f(x) = f(y)$. $R$ est une relation d'équivalence. Alors l'application $\begin{array}{rccc} \overline{f} : & E/R & \longrightarrow & f(E) \\ & \overline{x} & \longmapsto & f(x) \end{array}$ est une bijection.
Il faut savoir le démontrer.

**Propriété.** La composée de deux injections est une injection.
La composée de deux surjections est une surjection.
La composée de deux bijections est une bijection.
Il faut savoir le démontrer.

**Propriété.** Soit $f$ une application de $E$ dans $F$ et $g$ une application de $F$ dans $G$.
Si $g \circ f$ est injective, alors $f$ est injective.
Si $g \circ f$ est surjective, alors $g$ est surjectif.

**Définition et propriété :**
$\diamond$ Soit $f$ une bijection de $E$ dans $F$. Pour tout $y \in F$, notons $f^{-1}(y)$ l'unique antécédent de $y$ par $f$. Alors $f^{-1}$ est une bijection de $F$ dans $E$, appelée la bijection réciproque de $f$.
$\diamond$ On vérifie que $f \circ f^{-1} = Id_F$ et $f^{-1} \circ f = Id_E$.
$\diamond$ Réciproquement, s'il existe une application $g$ de $F$ dans $E$ telle que $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$, alors $f$ et $g$ sont des bijections et $g = f^{-1}$.
$\diamond$ $(f^{-1})^{-1} = f$.

Il faut savoir le démontrer.

**Propriété.** Si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ sont bijectives, alors $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

**Remarque.** La notation $f^{-1}$, pour une application $f$, est utilisée selon deux sens *différents*, qu'il est important de bien distinguer :
- Lorsque $f$ est une application *quelconque* de $E$ dans $F$, si $B$ est une partie de $F$, alors $f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$.
- Lorsque $f$ est une *bijection* de $E$ dans $F$, pour tout $y \in F$, $f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent de $y$ par $f$.

En particulier, dès que l'on utilise une expression de la forme $f^{-1}(y)$ où $y$ est un *élément* de l'ensemble d'arrivée de $f$, on suppose nécessairement que $f$ est une bijection.
Lorsque $y \in F$, il importe de bien distinguer $f^{-1}(y)$ qui représente, pour une bijection $f$, l'unique antécédent de $y$, et $f^{-1}(\{y\})$ qui représente, pour une application $f$ quelconque, l'ensemble des antécédents de $y$. Cet ensemble peut être vide lorsque $f$ n'est pas surjective, il peut contenir plus de deux éléments lorsque $f$ n'est pas injective.

**Propriété.** Si $f$ est une bijection de $E$ dans $F$, alors pour tout $B \subset F$, $f(f^{-1}(B)) = B$ et, pour tout $A \subset E$, $f^{-1}(f(A)) = A$.

**Propriété.** (HP) Les applications injectives sont simplifiables à gauche et les applications surjectives sont simplifiables à droite.
Il faut savoir le démontrer.

**Propriété.** Si $E \neq \emptyset$, alors $f : E \longrightarrow F$ est injective si et seulement si il existe $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = Id_E$.
Il faut savoir le démontrer.

**Propriété.** $f : E \longrightarrow F$ est surjective si et seulement si il existe $g : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g = Id_F$.
Il faut savoir le démontrer.

## 2 Lois internes

**Définition.** Une loi interne sur $E$ est une application $f$ de $E \times E$ dans $E$. Dans ce contexte la notation *préfixe* "$f(x, y)$" est remplacée par la notation *infixe* "$x \ f \ y$", où $x, y \in E$.
On dit que $(E, f)$ est un magma (hors programme).

**Définition.** Soit $\Delta$ une loi interne sur $E$. $\Delta$ est associative si et seulement si pour tout $x, y, z \in E$, $(x \ \Delta \ y) \ \Delta \ z = x \ \Delta \ (y \ \Delta \ z)$. On dit alors que $(E, \Delta)$ est un magma associatif. Dans ce cas, si $x_1, \ldots, x_p \in E$, la quantité $x_1 \ \Delta \ x_2 \ \Delta \ \cdots \ \Delta \ x_p$ ne dépend pas des différentes façons de la parenthéser.

**Définition.** Soit $\Delta$ une loi interne sur $E$ et soit $e \in E$. On dit que $e$ est un élément neutre de $(E, \Delta)$ si et seulement si, pour tout $x \in E$, $x \ \Delta \ e = e \ \Delta \ x = x$. Si $E$ possède un élément neutre, il est unique. On dit alors que $(E, \Delta)$ est un magma unitaire, ou bien unifère.

**Définition.** Un monoïde est un magma associatif unitaire. Il est commutatif, ou abélien, si et seulement si pour tout $x, y$, $x \ \Delta \ y = y \ \Delta \ x$.

**Remarque.** l'usage est de confondre le monoïde $(E, \Delta)$ et l'ensemble sous-jacent $E$.

**Notation.** Si $(E, \Delta)$ est un monoïde d'élément neutre $e$, on convient que
$x_1 \ \Delta \ x_2 \ \Delta \ \cdots \ \Delta \ x_p = e$, lorsque $p = 0$.

**Définition.** Soit $(E, \times)$ un monoïde d'élément neutre $1_E$ et $x \in E$. On dit que $x$ est inversible à droite (resp : à gauche) si et seulement si il existe $y \in E$ tel que $yx = 1_E$ (resp : $xy = 1_E$).
Si $x$ est inversible à gauche et à droite, il existe un unique $y \in E$ tel que $xy = yx = 1_E$. On note $y = x^{-1}$, c'est le symétrique de $x$.

Il faut savoir le démontrer.

**Propriété.**
Si $x$ et $y$ sont inversibles dans le monoïde $(E, \times)$, alors $xy$ est aussi inversible et $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

**Définition.** Un groupe est un monoïde dans lequel tout élément est inversible.

**Définition.** On appelle ***anneau*** tout triplet $(A, +, .)$, où $A$ est un ensemble et où "+" et "." sont deux lois internes sur $A$ telles que
- $(A, +)$ est un groupe abélien (l'élément neutre étant noté 0 ou $0_A$),
- "." est une loi associative, admettant un élément neutre noté 1 ou $1_A$,
- la loi "." est ***distributive*** par rapport à la loi "+", c'est-à-dire que
$\forall (x, y, z) \in A^3 \;\; x.(y + z) = (x.y) + (x.z)$ et $(x + y).z = (x.z) + (y.z)$.

# 3 Définition du cardinal d'un ensemble

**Définition.** Soit $E$ un ensemble. S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{N}_n$ est en bijection avec $E$, alors $n$ est unique. On dit que $n$ est le cardinal de $E$. Il est noté $\text{card}(E)$ ou bien $\#E$, ou encore $|E|$.
En cas d'inexistence d'un tel entier $n$, on dit que $E$ est infini.

**Exemple.** Pour tout $n, m \in \mathbb{Z}$, $\text{Card}(\llbracket n, m \rrbracket) = m - n + 1$.

**Propriété.** Soit $A$ un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$ et soit $B$ un ensemble quelconque.
$B$ est fini de cardinal $n$ si et seulement si il existe une bijection de $A$ sur $B$.

**Propriété.** Soit $A$ un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Soit $B$ une partie de $A$.
Alors $B$ est un ensemble fini et $|B| \leq |A|$, avec égalité si et seulement si $B = A$.

**Propriété.** Soit $A$ une partie de $\mathbb{N}$. $A$ est finie si et seulement si elle est majorée.
En particulier, $\mathbb{N}$ est infini.

# 4 Cardinaux d'ensembles usuels

**Propriété.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une réunion *disjointe* de $n$ ensembles finis est finie et son cardinal est égal à la somme des cardinaux de ces ensembles.

**Propriété.** Soit $E$ un ensemble fini et $A$ une partie de $E$. Alors $|E \setminus A| = |E| - |A|$.

**Propriété.** Soit $E$ un ensemble fini et $R$ une relation d'équivalence sur $E$.
Alors $E/R$ est aussi de cardinal fini, inférieur au cardinal de $E$.

**Formule :**

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Il faut savoir le démontrer.

**Propriété. Formule du crible :** (Hors programme)

$$\#\Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \#E_i - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \#(E_i \cap E_j) + \cdots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \#\Big(\bigcap_{j=1}^{k} E_{i_j}\Big) + \cdots + (-1)^{n+1} \#\Big(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\Big).$$

Il faut savoir le démontrer.

**Propriété.** Le cardinal du produit cartésien de $n$ ensembles finis est égal au produit des cardinaux de ces ensembles.
Il faut savoir le démontrer.

**Formule :** $|\mathcal{F}(E,F)| = |F|^{|E|}$.
Il faut savoir le démontrer.

**Propriété.** Si $E$ est de cardinal $n$, alors $\mathcal{P}(E)$ est de cardinal $2^n$.
Il faut savoir le démontrer.

# 5 Sommes et produits finis

**Formules :**

- Pour tout $a \in G$ et $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} a = na$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

**Notation.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S}_n$ désigne l'ensemble des bijections de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_n$, que l'on appelle des permutations sur $\mathbb{N}_n$.

**Commutativité généralisée :** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x_1, \dots, x_n \in G$. Alors, $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{\sigma(j)}$.

**Définition.** Soit $A$ un ensemble fini et $(x_a)_{a\in A}$ une famille de $G$ indexée par $A$.
Notons $n = |A|$. Il existe une bijection $f$ de $\mathbb{N}_n$ dans $A$. On pose $\sum_{a\in A} x_a \triangleq \sum_{i=1}^{n} x_{f(i)}$.
Cette quantité ne dépend pas de la bijection $f$.
Il faut savoir le démontrer.

**Propriété d'additivité :** Soit $A$ un ensemble fini, $(x_a)_{a\in A}$ et $(y_a)_{a\in A}$ deux familles d'éléments de $G$ indexées par $A$. Alors $\sum_{a\in A}(x_a + y_a) = \left(\sum_{a\in A} x_a\right) + \left(\sum_{a\in A} y_a\right)$.

**Distributivité généralisée :** Soit $A$ un ensemble fini, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $(x_a)_{a\in A}$une famille de *complexes* indexée par $A$. Alors $\sum_{a\in A}(\lambda x_a) = \lambda \sum_{a\in A} x_a$.

**Changement de variable dans une somme finie :** Soit $B$ un ensemble fini, $(x_b)_{b\in B}$ une famille d'éléments de $G$. Soit $\varphi$ une bijection d'un ensemble $A$ dans $B$. Alors $\sum_{b\in B} x_b = \sum_{a\in A} x_{\varphi(a)}$.

Il faut savoir le démontrer.

**Formule :** calcul d'une somme géométrique .
Soit $q \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$, soit $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leq n$. Alors $\sum_{k=m}^{n} q^k = \frac{q^m - q^{n+1}}{1-q}$.
Il faut savoir le démontrer.

**Théorème.** Soit $(G, \times)$ un groupe commutatif fini. Alors, pour tout $g \in G$, $g^{|G|} = 1_G$.
Il faut savoir le démontrer.

**Remarque.** Ce théorème est encore vrai lorsque $G$ n'est pas commutatif (cf plus loin).

**Sommation par paquets :** Soit $A$ un ensemble fini et $(x_a)_{a\in A}$ une famille d'éléments de $G$. On suppose qu'il existe un ensemble fini $B$ et une famille $(A_b)_{b\in B}$ de parties de $A$ telles que $A = \bigsqcup_{b\in B} A_b$.

Alors $\sum_{a\in A} x_a = \sum_{b\in B} \sum_{a\in A_b} x_a$.

**Sommation par paquets, seconde formulation :** Soit $A$ un ensemble fini et $(x_a)_{a\in A}$ une famille d'éléments de $G$. Soit $R$ une relation d'équivalence sur $A$. Alors $\sum_{a\in A} x_a = \sum_{c\in A/R} \sum_{a\in c} x_a$.

# 6 Applications et cardinaux (début)

**Notation.** Considérons une application $f$ de $E$ dans $F$, où $E$ est de cardinal fini.

**Propriété.** Soit $E$ un ensemble fini et $f$ une application de $E$ dans un ensemble quelconque $F$. Alors $f(E)$ est fini. De plus,
$|f(E)| \leq |E|$, avec égalité si et seulement si $f$ est injective, et
$|f(E)| \leq |F|$, avec égalité si et seulement si $f$ est surjective.
Il faut savoir le démontrer.

**Propriété.** Soit $E$ et $F$ deux ensembles finis *de même cardinal*. Soit $f$ une application de $E$ dans $F$. Alors $f$ injective $\iff$ $f$ surjective $\iff$ $f$ bijective .