DM 13 :
Corps totalement ordonnés

Il s'agit d'un sujet supplémentaire pour votre travail personnel.
Il n'est pas à rendre.
Un corrigé sera fourni jeudi 12 novembre.

Partie I : Groupes non archimédiens

Définition. On appelle groupe commutatif tout couple $(G, +)$, où G est un ensemble et où "+" est une loi interne sur G telle que :
- "+" est commutative : pour tout $x, y \in G$, $x + y = y + x$;
- G possède un élément neutre :
  il existe $0_G \in G$ tel que, pour tout $x \in G$, $x + 0_G = x$;
- "+" est associative : pour tout $x, y, z \in G$, $x + (y + z) = (x + y) + z$;
- pour tout $x \in G$, x possède un symétrique : il existe $y \in G$ tel que $x + y = 0$.

1°) On suppose que $(G, +)$ est un groupe commutatif.
Montrer que G possède un unique élément neutre.
Montrer que, pour tout $x \in G$, x possède un unique symétrique.

Lorsque $(G, +)$ est un groupe, pour tout $x \in G$, on notera $-x$ l'unique symétrique de x et, pour tout $x, y \in G$, on posera $x - y = x + (-y)$.

2°) Si (n, m) et (n', m') sont deux éléments de $\mathbb{Z}^2$,
on pose $(n, m) + (n', m') = (n + n', m + m')$.
Montrer que $(\mathbb{Z}^2, +)$ est un groupe commutatif.

On appelle groupe commutatif totalement ordonné tout triplet $(G, +, \leq)$ tel que
- $(G, +)$ est un groupe commutatif ;
- $\leq$ est un ordre total sur G ;
- $\leq$ est compatible avec"+" : pour tout $x, y, z \in G$, si $x \leq y$, alors $x + z \leq y + z$.

3°) On définit sur $\mathbb{Z}^2$ une relation binaire notée $\leq_l$ en convenant que, pour tout $(x, y), (x', y') \in \mathbb{Z}^2$, $(x, y) \leq_l (x', y') \iff (x < x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y'))$.
Montrer que $(\mathbb{Z}^2, +, \leq_l)$ est un groupe totalement ordonné. On dira que $\leq_l$ est l'ordre lexicographique de $\mathbb{Z}^2$.

Si $(G,+)$ est un groupe commutatif et si $x \in G$, on définit par récurrence la suite $(nx)_{n\in\mathbb{N}}$ en convenant que $0x = 0_G$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)x = (nx) + x$.
De plus, lorsque $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, on convient que $nx = -((-n)x)$.

4°) On suppose que $(G,+,\leq)$ est un groupe commutatif totalement ordonné.
Pour tout $x, y \in G$, on convient de noter $x < y$ si et seulement si $x \leq y$ et $x \neq y$.
Soit $x \in G$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $x > 0_G$. Montrer que $nx > 0_G$.

On dit qu'un groupe totalement ordonné $(G,+,\leq)$ est archimédien si et seulement si, pour tout $x, y \in G$ tels que $0_G < x$ et $0_G < y$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x < ny$.
Par exemple, on sait d'après le cours que $(\mathbb{R},+,\leq)$ est archimédien.

5°) Montrer que $(\mathbb{Z}^2,+,\leq_l)$ n'est pas archimédien

Partie II : Anneaux non archimédiens

Définition. On appelle anneau commutatif tout triplet $(A,+,\times)$, où A est un ensemble et où "+" et "×" sont deux lois internes sur A telles que :
- $(A,+)$ est un groupe commutatif ;
- "×" est commutative : pour tout $x, y \in A$, $x \times y = y \times x$;
- A possède un élément neutre pour "×" :
  il existe $1_A \in A$ tel que, pour tout $x \in A$, $x \times 1_A = x$;
- "×" est associative : pour tout $x, y, z \in A$, $x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$;
- "×" est distributive par rapport à "+" :
  pour tout $x, y, z \in A$, $x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$.

Dans ce cas, lorsque $x, y \in A$, on pourra noter "xy" au lieu de "$x \times y$".

6°) On suppose que $(A,+,\times)$ est un anneau commutatif.
Montrer que, pour tout $a \in A$, $0_A \times a = 0_A$.
Lorsque $A \neq \{0_A\}$, montrer que $1_A \neq 0_A$.

Si (n,m) et (n',m') sont deux éléments de $\mathbb{Z}^2$,
on pose $(n,m) \times (n',m') = (nn',mm')$.
On peut vérifier (on ne demande pas de le démontrer) que $(\mathbb{Z}^2,+,\times)$ est un anneau commutatif.

On appelle anneau commutatif totalement ordonné tout quadruplet $(A,+,\times,\leq)$ tel que
- $(A,+,\times)$ est un anneau commutatif ;
- $\leq$ est un ordre total sur A ;
- $\leq$ est compatible avec"+" : pour tout $x, y, z \in A$, si $x \leq y$, alors $x + z \leq y + z$.
- $\leq$ vérifie la règle des signes : pour tout $x, y \in A$, si $0_A \leq x$ et $0_A \leq y$, alors $0_A \leq x \times y$.

7°) Montrer que $(\mathbb{Z}^2,+,\times,\leq_l)$ n'est pas un anneau totalement ordonné.

On admet (on ne demande pas de le démontrer) que l'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels est un anneau commutatif lorsqu'on le munit de l'addition et de la multiplication usuelle entre polynômes. En particulier, $0_{\mathbb{R}[X]}$ est la fonction constante égale à 0, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $1_{\mathbb{R}[X]}$ est la fonction constante égale à 1.

Lorsque $P \in \mathbb{R}[X]$, avec $P \neq 0$, en notant n son degré, on sait qu'il existe des réels $a_0, \ldots, a_n$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. Alors a_n s'appelle le coefficient dominant de P, que l'on notera également $\mathrm{dom}(P)$.
Lorsque $P \in \mathbb{R}[X]$, on convient d'écrire $0_{\mathbb{R}[X]} \leq P$ si et seulement si $P = 0$ ou bien si $\mathrm{dom}(P) > 0$.
Lorsque $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on convient d'écrire $P \leq Q$ si et seulement si $0_{\mathbb{R}[X]} \leq Q - P$.

8°) Montrer que "$\leq$" est un ordre sur $\mathbb{R}[X]$.

9°) Montrer que $(\mathbb{R}[X], +, \times, \leq)$ est un anneau totalement ordonné.

10°) Montrer que $(\mathbb{R}[X], +, \leq)$ n'est pas un groupe archimédien.

Partie III : Corps des fractions d'un anneau intègre

On dit que $(A, +, \times)$ est un anneau intègre si et seulement si c'est un anneau commutatif tel que :
- $A \neq \{0_A\}$ et
- pour tout $a, b \in A$, $ab = 0 \Longrightarrow (a = 0$ ou $b = 0)$.

11°) Montrer que $(\mathbb{R}[X], +, \times)$ est intègre.

12°) Soit $(A, +, \times, \leq)$ un anneau intègre totalement ordonné.
Soit $x, y, z \in A$, avec $0_A < z$. Montrer que $x \leq y \Longleftrightarrow xz \leq yz$.

On suppose jusqu'à la fin de cette partie que $(A, +, \times)$ est un anneau intègre.
On définit une relation binaire R sur $A \times (A \setminus \{0_A\})$ par :

$$\forall (a, b), (c, d) \in A \times (A \setminus \{0_A\}), \;\; (a, b) \; R \; (c, d) \Longleftrightarrow ad = bc.$$

13°) Montrer que R est une relation d'équivalence.

On note K l'ensemble quotient de $A \times (A \setminus \{0_A\})$ par R, c'est-à-dire que K est l'ensemble des classes d'équivalence de la relation R.
Pour tout $(a, b) \in A \times (A \setminus \{0_A\})$, on note $\frac{a}{b}$ la classe d'équivalence de (a, b) pour la relation R.
Pour tout $(a, b), (c, d) \in A \times (A \setminus \{0_A\})$, on pose $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$ et $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + cb}{bd}$.

14°) Montrer que ces deux dernières égalités définissent deux lois internes sur K.

15°) Montrer que $(K, +, \times)$ est un anneau commutatif.

Soit $(B, +, \times)$ un anneau commutatif. On dit que c'est un corps si et seulement si
- $B \neq \{0_B\}$ et
- pour tout $b \in B$ tel que $b \neq 0_B$, il existe $a \in B$ tel que $ab = 1_B$. Dans ce cas, on dit que a est l'inverse de b et on le note b^{-1}.

16°) Montrer que tout corps est un anneau intègre.

17°) Montrer que $(K, +, \times)$ est un corps.

Lorsque f est une application d'un anneau commutatif $(A, +, \times)$ vers un second anneau commutatif $(B, +, \times)$, on dit que f est un morphisme d'anneaux si et seulement si
- pour tout $x, y \in A$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$;
- pour tout $x, y \in A$, $f(x \times y) = f(x) \times f(y)$;
- $f(1_A) = 1_B$.

Notons $\begin{array}{rccc} \varphi : & A & \longrightarrow & K \\ & a & \longmapsto & \dfrac{a}{1_A} \end{array}$.

18°) Montrer que φ est un morphisme injectif d'anneaux.

On identifie A avec $\varphi(A)$ en convenant que, pour tout $a \in A$, $a = \dfrac{a}{1_A}$.

19°) Avec cette identification, montrer que $K = \{a \times b^{-1} \ / \ (a, b) \in A \times (A \setminus \{0_A\})\}$.

On dit que $(K, +, \times)$ est le corps des fractions de l'anneau intègre $(A, +, \times)$.
Par exemple (on ne demande pas de le démontrer), $\mathbb{Q}$ est le corps des fractions de $\mathbb{Z}$.

Partie IV : Corps totalement ordonné non archimédien

Lorsque $(K, +, \times)$ est un corps et que "$\leq$" est un ordre sur K, on dit que $(K, +, \times, \leq)$ est un corps totalement ordonné si et seulement si c'est un anneau commutatif totalement ordonné.

20°) Montrer qu'il n'existe aucun ordre sur $\mathbb{C}$ tel que, en notant "$\leq$" cet ordre, $(\mathbb{C}, +, \times, \leq)$ est un corps totalement ordonné.

On note $\mathbb{R}(X)$ le corps des fractions de $\mathbb{R}[X]$.

21°) Montrer qu'il existe un unique ordre sur $\mathbb{R}(X)$ qui prolonge l'ordre défini sur $\mathbb{R}[X]$ en question 8 et pour lequel $(\mathbb{R}(X), +, \times, \leq)$ est un corps totalement ordonné.

22°) Montrer que $(\mathbb{R}(X), +, \times, \leq)$ n'est pas archimédien.

23°) Donner une partie M de $\mathbb{R}(X)$, non vide et majorée, qui n'admet pas de borne supérieure.

24°) Plus généralement, montrer que pour tout corps totalement ordonné, s'il n'est pas archimédien, alors il existe au moins une partie non vide majorée de ce corps qui n'admet pas de borne supérieure. Que pensez-vous de la réciproque ?