Résumé de cours :
Semaine 9, du 9 au 10 novembre.

1 Applications et cardinaux (suite et fin)

Propriété. Soit A et B deux ensembles.
S'il existe une injection de A dans B et si B est fini, alors A est fini et $|A| \leq |B|$.
S'il existe une surjection de A dans B et si A est fini, alors B est fini et $|A| \geq |B|$.

Principe des tiroirs : Si l'on doit ranger p objets dans n tiroirs et que $p > n$, alors il existe au moins 2 objets qui seront dans le même tiroir.
Plus généralement, si $p > cn$, où $c \in \mathbb{N}^*$, il existe un tiroir qui contient plus de $c+1$ objets.
Il faut savoir le démontrer.

Principe des bergers : Soit E et F des ensembles finis et $f : E \longrightarrow F$ une application. On suppose que tout élément de F possède exactement k antécédents par f. Alors $|E| = k|F|$.
Il faut savoir le démontrer.

2 Ensembles dénombrables

Définition. Un ensemble est dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Propriété. Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Propriété. On dit qu'un ensemble est au plus dénombrable si et seulement si il est fini ou dénombrable.
Un ensemble est au plus dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

Lemme technique : Un ensemble I est fini ou dénombrable si et seulement s'il existe une suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties finies de I dont la réunion est égale à I.
Dans ce cas, on dira que $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite adaptée à I.

Corollaire. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.
Il faut savoir le démontrer.

> **Exercice.** Montrer que $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable.
> *Solution.* À connaître.

Propriété. Une réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Propriété. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Hors programme : $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

3 Dénombrement

3.1 Listes et combinaisons

Vocabulaire : Soit E un ensemble et $p \in \mathbb{N}$.
- Une p-liste (aussi appelée un p-uplet) d'éléments de E est un élément de E^p.
- Un p-arrangement d'éléments de E est une p-liste dont les éléments sont deux à deux distincts.
- Une p-combinaison de E est une partie de E de cardinal p.

Propriété. Le nombre de p-listes d'éléments de E est égal à n^p (c'est $|E|^p$).

Propriété. Si $a = (e_1, \dots, e_p)$ est un p-arrangement de E, l'application $f_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}_p & \longrightarrow & E \\ i & \longmapsto & e_i \end{array}$ est une injection. De plus, $a \longmapsto f_a$ est une bijection de l'ensemble A_p des p-arrangements de E vers l'ensemble I_p des injections de $\mathbb{N}_p$ dans E.
Il faut savoir le démontrer.

Théorème. Le nombre de p-arrangements dans un ensemble de cardinal n est égal à $n(n-1)\cdots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$. C'est aussi le nombre d'injections d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments.

Corollaire. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\mathcal{S}_n| = n!$. Plus généralement, factorielle de n est le nombre de bijections d'un ensemble de cardinal n dans un autre ensemble de cardinal n.

Théorème. Le nombre de p-combinaisons d'éléments d'un ensemble de cardinal n, c'est-à-dire le nombre de parties de p éléments incluses dans un ensemble de cardinal n est égal à

$$\binom{n}{p} \triangleq \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}.$$

Cette quantité s'appelle le coefficient binomial "p parmi n".
Il faut savoir le démontrer.

3.2 Les coefficients binomiaux

Formule : $\forall n, p \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq p \leq n$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

Formule comité-président : Pour tout $n, k \in \mathbb{N}^*$ avec $k \leq n$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
La preuve combinatoire est à connaître.

Formule comité-bureau : si $p \leq k \leq n$, $\binom{k}{p} \times \binom{n}{k} = \binom{n}{p} \times \binom{n-p}{k-p}$.
La preuve combinatoire est à connaître.

Formule du triangle de Pascal : $\forall n, p \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq p < n$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$.
La preuve combinatoire est à connaître.

Remarque. Il est souvent pratique de convenir que, pour tout $n, p \in \mathbb{Z}$ tels que $\neg(0 \leq p \leq n)$, $\binom{n}{p} = 0$.

Représentation graphique du triangle de Pascal : À connaître.

Formule du binôme de Newton : On se place dans un anneau $(A, +, \times)$. Soit a_1 et a_2 deux éléments de A qui commutent, c'est-à-dire tels que $a_1 a_2 = a_2 a_1$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (a_1 + a_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_1^k \, a_2^{n-k}.$$

Les deux preuves sont à connaître.

Formule du multinôme : (Hors programme). Soit $p, n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a_1, \ldots, a_p$ p éléments d'un anneau A qui commutent deux à deux. Alors

$$(a_1 + \cdots + a_p)^n = \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_p \in \mathbb{N} \\ \text{tel que } i_1 + \cdots + i_p = n}} \frac{n!}{i_1! \times \cdots \times i_p!} \, a_1^{i_1} \times \cdots \times a_p^{i_p}.$$

Il faut savoir le démontrer.