# DM 14. Enoncé

## Problème 1 : théorème du point fixe de Tarski et théorème de Cantor-Bernstein

On dit qu'un ensemble ordonné $(E, \leq)$ est un treillis complet si et seulement si toute partie de $E$ possède une borne supérieure et une borne inférieure dans $E$.

**1°)**
**a)** Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Montrer que $[a, b]$, muni de l'ordre usuel entre réels, est un treillis complet.
**b)** Soit $F$ un ensemble. On note $\mathcal{P}(F)$ l'ensemble des parties de $F$. Montrer que $(\mathcal{P}(F), \subset)$ est un treillis complet.
**c)** Montrer que $\mathbb{N}$ muni de la relation de divisibilité est un treillis complet.

**2°)** Soit $(E, \leq)$ un treillis complet.
Soit $f$ une application croissante de $E$ dans $E$.
Si $x \in E$, on dit que $x$ est un point fixe de $f$ si et seulement si $f(x) = x$.
On pose $A = \{x \in E / x \leq f(x)\}$. On note $\alpha$ la borne supérieure de $A$.
**a)** Montrer que $f(\alpha)$ est un majorant de $A$.
**b)** Montrer que $\alpha$ est le plus grand point fixe de $f$.
**c)** Montrer également que l'ensemble des points fixes de $f$ possède un minimum.

Les résultats des questions b) et c) constituent le théorème du point fixe de Tarski.

**3°)** Soient $E$ et $F$ deux ensembles.
On suppose qu'il existe une application injective $f$ de $E$ dans $F$ et une application injective $g$ de $F$ dans $E$. Il s'agit de démontrer le théorème de Cantor-Bernstein qui affirme que dans ces conditions, il existe une bijection de $E$ dans $F$ :
Pour toute $A \in \mathcal{P}(E)$, on pose $G(A) = E \setminus g(F \setminus f(A))$.
En appliquant le théorème du point fixe de Tarski à l'application $G$, démontrer le théorème de Cantor-Bernstein.

# Problème 2 : triplets pythagoriciens

On rappelle que tout rationnel $x$ non nul se décompose de manière unique sous la forme $x = \frac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$, avec $p$ et $q$ premiers entre eux.
On se place dans le plan $P$ usuel, muni d'un repère $R = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé direct. Dans cet exercice, on identifiera les points de $P$ avec le couple de leurs coordonnées dans le repère $R$.

**1°)** On note $C$ le cercle de centre $O$ et de rayon 1. On pose $A = (-1, 0)$.
Pour tout point $M \in C \setminus \{A\}$, montrer qu'il existe un unique $t \in \mathbb{R}$
tel que $M = (\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2})$.

**2°)** Montrer que $t$ est un rationnel si et seulement si les coordonnées de $M$ sont toutes les deux rationnelles.

**3°)** Soient $a, b$ et $c$ trois entiers naturels tous non nuls tels que $a^2 + b^2 = c^2$.
a) Montrer qu'il existe deux entiers naturels non nuls, $u$ et $v$, premiers entre eux, tels que $\frac{a}{c} = \frac{v^2-u^2}{v^2+u^2}$ et $\frac{b}{c} = \frac{2uv}{v^2+u^2}$.
b) On suppose que 1 est le seul diviseur (dans $\mathbb{N}$) commun de $a$, $b$ et $c$.
Montrer que $a, b$ et $c$ sont deux à deux premiers entre eux.
Si l'on suppose que $b$ est pair, montrer que $a = v^2 - u^2$, $b = 2uv$ et $c = v^2 + u^2$.

**4°)** Expliquer comment construire tous les triplets $(a, b, c)$ d'entiers naturels tous non nuls tels que $a^2 + b^2 = c^2$ (on les appelle les triplets pythagoriciens).

# Problème 3 : parties denses dans $\mathbb{R}$.

## Première partie : préliminaires.

On "rappelle" qu'une suite $(x_n)$ de réels converge vers un réel $\ell$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geq N\ \ |x_n - l| \leq \varepsilon.$$

**1°)** Soit $I$ un intervalle contenant une infinité de réels, c'est-à-dire que $I$ est non réduit à $\emptyset$ ou à un singleton.
Soit $D$ une partie de $I$. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\forall x \in I,\ \ \forall \varepsilon > 0,\ \ ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[ \cap D \neq \emptyset$.
2. $\forall x \in I,\ \ \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}},\ \ a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.
3. $\forall x, y \in I,\ \ x < y \Longrightarrow [\exists z \in D,\ \ x < z < y]$.

Lorsqu'elles sont vérifiées, on dit que $D$ est dense dans $I$.

**2°)** Soit $I$ un intervalle non réduit à $\emptyset$ ou à un singleton. Soit $D$ une partie de $I$ que l'on suppose dense dans $I$. Montrer que, pour tout $x \in I$ et $\varepsilon > 0$, $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[ \cap D$ est de cardinal infini.

**3°)** Soit $I$ et $J$ deux intervalles non réduits à $\emptyset$ ou à un singleton. Soit $f$ une application continue et surjective de $I$ dans $J$.
On admettra que, d'après la continuité de $f$, pour tout $a \in I$,
pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$, on a $f(a_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$.
Montrer que si $D$ est une partie de $I$ qui est dense dans $I$,
alors $f(D)$ est dense dans $J$.

## Seconde partie : densité des sous-groupes de $\mathbb{R}$.

On suppose que $G$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{R}, +)$, c'est-à-dire que $0 \in G$ et que pour tout $x, y \in G$, $x - y \in G$.
On suppose de plus que $G$ est différent de $\{0\}$.

**4°)** Montrer que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ possède une borne inférieure, que l'on notera $a$.

**5°)** Si $a = 0$, montrer que $G$ est dense dans $\mathbb{R}$.

**6°)** Dans cette question, on suppose que $a > 0$.
**a)** On suppose que $a \notin G$.
Montrer qu'il existe $x, y \in G$ tels que $a < x < y < 2a$ et en déduire une contradiction.
**b)** Montrer que $G = a\mathbb{Z}$.

**7°)** On dit qu'un point $x$ de $G$ est isolé si et seulement s'il existe un intervalle ouvert $I$ tel que $I \cap G = \{x\}$.
On dit que $G$ est discret si et seulement si tous ses points sont isolés.
Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur $a$ pour que $G$ soit discret.

**8°)** Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^{*2}$. On pose $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{an + bm / (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}$.
Montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\dfrac{a}{b}$ est irrationnel.

**9°)** On dit qu'une partie $A$ de $\mathbb{R}$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$ si et seulement si $A$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ tel que $1 \in A$ et, pour tout $a, b \in A$, $ab \in A$.
Montrer que si $A$ est un sous-anneau différent de $\mathbb{Z}$, alors $A$ est dense dans $\mathbb{R}$.

**10°)** On admet que $\pi$ est irrationnel.
**a)** Montrer que $\{\cos n / n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.
**b)** Soit $\ell \in [-1, 1]$. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \forall N \in \mathbb{N},\ \ \exists n \geq N,\ \ |\ell - \cos n| < \varepsilon.$$

**c)** Montrer que, pour tout $\ell \in [-1, 1]$, il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\cos(\varphi(n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.