Feuille d'exercices 7.
Corrigé de l'exercice 17.

Exercice 7.17 :

1°) $\diamond$ Supposons qu'il existe une application h de E dans F telle que $g = f \circ h$.
On conseille de représenter les ensembles E, F, G et les applications f, g, h sur un diagramme.
Alors $g(E) = f(h(E)) \subset f(F)$.
$\diamond$ Réciproquement, supposons que $g(E) \subset f(F)$.
Soit $x \in E$. Alors $g(x) \in f(F)$, donc il existe $h(x) \in F$ tel que $g(x) = f(h(x))$.
Alors, en utilisant l'axiome du choix, il existe $h \in \mathcal{F}(E, F)$ telle que $g = f \circ h$.
En conclusion, la CNS cherchée est $g(E) \subset f(F)$.

2°) Supposons que $g(E) \subset f(F)$.
Lorsque $x \in E$, $g(x) = f(h(x))$ si et seulement si $h(x)$ est un antécédent par f de $g(x)$, donc $h(x)$ est unique si et seulement si $g(x)$ admet un unique antécédent par f. Ainsi, h est unique si et seulement si pour tout $x \in E$, $g(x)$ admet un unique antécédent par f. Montrons que cette dernière propriété est équivalente à l'injectivité de $f|_{f^{-1}(g(E))}$.
Supposons qu'il existe $x \in E$ tel que $g(x) = f(t) = f(t')$ avec $t, t' \in F$ et $t \neq t'$.
$f(t) = g(x) \in g(E)$, donc $t \in f^{-1}(g(E))$. De même $t' \in f^{-1}(g(E))$, donc $f|_{f^{-1}(g(E))}$ n'est pas injective.
Réciproquement, si $f|_{f^{-1}(g(E))}$ n'est pas injective, il existe $t, t' \in f^{-1}(g(E))$ tels que $f(t) = f(t')$ et $t \neq t'$. Alors $f(t) \in g(E)$, donc il existe $x \in E$ tel que $g(x) = f(t) = f(t')$.
Alors $g(x)$ admet 2 antécédents au moins par f.
En conclusion, la CNS d'unicité de h est l'injectivité de $f|_{f^{-1}(g(E))}$.

3°) $\diamond$ Supposons qu'il existe une application h de F dans G telle que $g = h \circ f$. On pourra à nouveau représenter les ensembles E, F, G et les applications f, g, h sur un diagramme.
Alors, pour tout $x, y \in E$, $f(x) = f(y) \Longrightarrow g(x) = g(y)$.
$\diamond$ Réciproquement, supposons que : $\forall x, y \in E \ \ (f(x) = f(y) \Longrightarrow g(x) = g(y))$.
Soit $y \in F$. Si $y \in f(E)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On peut alors poser $h(y) = g(x)$, car pour tout autre élément $x' \in E$ tel que $y = f(x')$, par hypothèse, $g(x) = g(x')$.
Si $y \notin f(E)$, on pose $h(y) = g$, où g est un élément quelconque G, ce qui nécessite de supposer que G est non vide.

On a ainsi défini, une application h de F dans G telle que, pour tout $x \in E$, $h(f(x)) = g(x)$, donc telle que $g = h \circ f$.
Dans le cas où G est vide, l'existence de l'application g implique que E est aussi vide, donc f est l'application vide de E dans F. Alors pour tout application h de F dans G, $h \circ f$ et g sont égales, car égales à l'application vide de E dans G, donc la CNS cherchée est l'existence d'une application de F dans $\emptyset = G$, ce qui est vrai si et seulement si F est vide.
En conclusion, on a montré que la CNS cherchée est $G = F = \emptyset$ ou bien $[G \neq \emptyset$ et $\forall x, y \in E \ (f(x) = f(y) \Longrightarrow g(x) = g(y))]$.
$\diamond$ On suppose que cette condition est remplie et on étudie l'unicité de h.
Lors de la construction précédente de h, pour $y \in f(E)$, la valeur de $h(y)$ est unique, donc lorsque f est surjective, h est unique.
Si f n'est pas surjective et que G possède au moins deux éléments g et g', lorsque $y \in F \setminus f(E)$, on peut choisir $h(y) = g$ ou $h(y) = g'$, donc il n'y a pas unicité de h.
Si f n'est pas surjective mais que G est un singleton, alors h reste unique car de toute façon, dans ce cas, il existe une unique application de F dans G.
Enfin, si $E = F = G = \emptyset$, h est unique, égale à la bijection vide.