Résumé de cours :
Semaine 10, du 16 au 20 novembre.

Première partie

Sommes finies (suite et fin)

1 Les coefficients binomiaux (suite et fin)

Formule de Leibniz : Soient f et g deux applications d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$. Si f et g sont n fois dérivables sur I, alors fg est n fois dérivable sur I et $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

Il faut savoir le démontrer.

2 Quelques techniques

2.1 Télescopage

$$\sum_{k=m}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_m \text{ et } \sum_{k=m+1}^{n+1} (u_{k-1} - u_k) = u_m - u_{n+1}.$$

2.2 Séparation des indices pairs et impairs

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} u_k + \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} u_k = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} u_{2p} + \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} u_{2p+1}.$$

2.3 Fonction génératrice

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leq n$ et soit $(u_k)_{m \leq k \leq n}$ une famille de complexes. La fonction génératrice de cette famille est l'application polynomiale $P : x \longmapsto \sum_{k=m}^{n} u_k x^k$.

Si P est connu, on peut en déduire plusieurs sommes : $\sum_{k=m}^{n} u_k = P(1)$, $\sum_{k=m}^{n} k u_k = P'(1)$, $\sum_{k=m}^{n} k(k-1) u_k = P''(1)$, $\sum_{k=m}^{n} \frac{u_k}{k+1} = \int_0^1 P(t)dt$ etc.

2.4 Quelques formules

Formule de Bernoulli : Soit $(A,+,\times)$ un anneau. Soit a et b deux éléments de A qui commutent (i.e $ab=ba$). Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)\sum_{k=0}^{n}a^kb^{n-k}$.

Il faut savoir le démontrer.

Somme géométrique : Une suite (u_n) de complexes est géométrique de raison r si et seulement si $\forall n\in\mathbb{N},\ \ u_{n+1}=ru_n$. Dans ce cas, $u_n=u_0r^n$ et $\sum_{k=m}^{n}u_k=\dfrac{u_{n+1}-u_m}{r-1}$.

2.5 Sommes doubles

$$\sum_{\substack{m\leq k\leq n\\ p\leq \ell\leq q}}u_{k,\ell}=\sum_{k=m}^{n}\sum_{\ell=p}^{q}u_{k,\ell}=\sum_{\ell=p}^{q}\sum_{k=m}^{n}u_{k,\ell}.$$

Propriété. Dans un anneau, $\displaystyle\sum_{\substack{m\leq k\leq n\\ p\leq \ell\leq q}}v_kw_\ell=\Big(\sum_{k=m}^{n}v_k\Big)\Big(\sum_{\ell=p}^{q}w_\ell\Big)$.

2.6 Sommes triangulaires

$$\sum_{m\leq k\leq \ell\leq n}u_{k,\ell}=\sum_{k=m}^{n}\sum_{\ell=k}^{n}u_{k,\ell}=\sum_{\ell=m}^{n}\sum_{k=m}^{\ell}u_{k,\ell}.$$

Il faut savoir le démontrer.

2.7 Produits

Toutes les propriétés précédentes, lorsqu'elles étaient valables dans un monoïde commutatif $(G,+)$ sont valables en notation multiplicative dans un monoïde commutatif $(G,\times)$.

Deuxième partie
Construction de $\mathbb{C}$

3 Structure de corps

Propriété. $\mathbb{C}$ est un corps, dont $\mathbb{R}$ est un sous-corps et dont les lois sont définies par

$$\boxed{\forall a,b,c,d\in\mathbb{R},\ \begin{cases}(a+ib)+(c+id) &=(a+c)+i(b+d)\\ (a+ib)\times(c+id) &=(ac-bd)+i(ad+bc)\end{cases}}$$

Si $z\neq 0$, $\boxed{\text{l'inverse de } z=a+ib \text{ est } \dfrac{a-ib}{a^2+b^2}}$.

Définition. $\forall z\in\mathbb{C},\ \ \exists!a,b\in\mathbb{R},\ \ z=a+ib$. On note $a=\mathrm{Re}(z)$ et $b=\mathrm{Im}(z)$.
L'écriture du complexe z sous la forme $z=\mathrm{Re}(z)+i\mathrm{Im}(z)$ s'appelle l'écriture algébrique de z.

Définition. Les imaginaires purs sont les ib où $b\in\mathbb{R}$.

Propriété. Comme pour tout corps, $\mathbb{C}$ est intègre, c'est-à-dire que, pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, si $zz' = 0$, alors $z = 0$ ou $z' = 0$.

Propriété. $\boxed{\frac{1}{i} = -i}$.

Linéarité des parties réelle et imaginaire : Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,
$\mathrm{Re}(\alpha z + z') = \alpha \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(\alpha z + z') = \alpha \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$.

4 Le plan complexe

Définition. On considère un plan P affine euclidien orienté, rapporté à un repère orthonormé direct $R = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On peut alors définir le complexe $z = x + iy$ et le point M de P dont les coordonnées dans le repère R sont (x, y). On dit que z est l'affixe du point M et que M est l'image du complexe z.
Si l'on note $M(z)$ l'image du complexe z, l'application $z \longmapsto M(z)$ est une bijection de $\mathbb{C}$ dans P qui permet parfois d'identifier $\mathbb{C}$ avec P (muni de son repère R).
On dit également que z est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$ et que $\overrightarrow{OM}$ est le vecteur image de z.
Si l'on note $\overrightarrow{u(z)}$ le vecteur image de z, l'application $z \longmapsto \overrightarrow{u(z)}$ est une bijection de $\mathbb{C}$ dans l'ensemble des vecteurs de P.
Pour ces raisons, $\mathbb{C}$ est souvent appelé le plan complexe.

Interprétation géométrique de l'addition entre complexes :
Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. Avec les notations précédentes, notons $\overrightarrow{u_z}$ et $\overrightarrow{u_{z'}}$ les vecteurs images de z et z'. Alors le vecteur $\overrightarrow{u_z} + \overrightarrow{u_{z'}}$ a pour affixe $z + z'$.
Ainsi, si l'on identifie $\mathbb{C}$ avec l'ensemble des vecteurs de P, l'addition entre complexes correspond à l'addition entre vecteurs du plan.
Si l'on visualise les deux complexes z et z' par deux points M_z et $M_{z'}$ du plan P, le complexes $z + z'$ est donc le point qui complète $O, M_z, M_{z'}$ en un parallélogramme.

Interprétation géométrique de la différence de deux complexes :
Avec les mêmes notations, $z' - z$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{M(z)M(z')}$.

Définition. L'homothétie de centre Ω et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$ est la transformation suivante du plan :
$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & P \\ M & \longmapsto & \Omega + \lambda\overrightarrow{\Omega M} \end{array}.$$

Interprétation géométrique du produit d'un complexe par un réel :
Soit $z \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors αz est l'affixe du vecteur $\alpha\overrightarrow{OM(z)}$.
Ainsi, αz est aussi l'affixe de l'image de $M(z)$ par l'homothétie de centre O et de rapport α.

5 La conjugaison

Définition. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Le conjugué du complexe z est le complexe $\overline{z} \stackrel{\Delta}{=} x - iy$.
Géométriquement, $\overline{z}$ est le symétrique de z selon l'axe Ox des réels.

Propriété. $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$ et $z \in i\mathbb{R} \iff \overline{z} = -z$.

Propriété. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.

Propriété. Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$, $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Corollaire. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $z \in \mathbb{C}^*$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

6 Le module

Définition. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Le module du complexe $z = x + iy$ est $|z| \triangleq \sqrt{x^2 + y^2}$.

Interprétation géométrique :
$|z|$ désigne la distance du point $M(z)$ à l'origine, ainsi que la norme du vecteur $\overrightarrow{u(z)}$.
La distance entre $M(z)$ et $M(z')$ est égale à $|z - z'|$.

Propriété. $\forall z \in \mathbb{C},\ |z|^2 = z\overline{z}$.

Propriété. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Propriété. Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$,
- $|z| = |\overline{z}|$ (compatibilité du module avec la conjugaison) ;
- $|zz'| = |z| \times |z'|$ (compatibilité du module avec la multiplication) ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$;
- si $z \neq 0$, $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$.

Propriété. Le module est une norme sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire que l'application $|.| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie les propriétés suivantes : Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,
- $|z| \geq 0$ (positivité),
- $|z| = 0 \iff z = 0$ (séparation),
- $|\alpha z| = |\alpha| \times |z|$ (homogénéité),
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire).

Il faut savoir le démontrer.

Distance entre complexes : Lorsque $x, y \in \mathbb{C}$, la quantité $d(x, y) = |x - y|$ est appelée la distance entre les deux complexes x et y.
La fonction distance vérifie les propriétés suivantes : pour tout $x, y, z \in \mathbb{C}$,
- Positivité : $d(x, y) \in \mathbb{R}_+$.
- $d(x, y) = 0 \iff x = y$: d permet de *séparer* les complexes.
- Symétrie : $d(x, y) = d(y, x)$.
- Inégalité triangulaire : $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Définition. Soit $a \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+$.
- La boule fermée de centre a et de rayon r est $B_f(a, r) = \{z \in \mathbb{C} / |z - a| \leq r\}$. C'est le disque de centre a et de rayon r.
- Lorsque $r > 0$, la boule ouverte de centre a et de rayon r est $B_o(a, r) = \{z \in \mathbb{C} / d(a, z) < r\}$. C'est le disque ouvert de centre a et de rayon r.
- La sphère de centre a et de rayon r est $S(a, r) = \{z \in \mathbb{C} / d(a, z) = r\}$. C'est le cercle de centre a et de rayon r.

Définition. $S(0, 1)$ s'appelle la sphère unité ou bien le cercle unité. Il est noté $\mathbb{U}$.

Propriété. $\boxed{\text{Pour tout } z \in \mathbb{C},\ z \in \mathbb{U} \iff \overline{z} = \dfrac{1}{z}}$.

Théorème.
Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, $|z + z'| \leq |z| + |z'|$, avec égalité si et seulement si $z' = 0$ ou bien $\dfrac{z}{z'} \in \mathbb{R}_+$.

Il faut savoir le démontrer.

Généralisation : (hors programme) $|z_1 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + \cdots + |z_n|$, avec égalité si et seulement si, pour tout i, j tels que $1 \leq i < j \leq n$, $(z_j = 0) \vee (\dfrac{z_i}{z_j} \in \mathbb{R}_+)$.

Il faut savoir le démontrer.

Corollaire de l'inégalité triangulaire :
- Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, $||z| - |z'|| \leq |z - z'|$.
- Pour tout $a, b, c \in \mathbb{C}$, $|d(a,b) - d(b,c)| \leq d(a,c)$.

Il faut savoir le démontrer.

Définition. Une partie A de $\mathbb{C}$ est bornée si et seulement si il existe $R \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $a \in A$, $|a| \leq R$, c'est-à-dire si et seulement si A est incluse dans un disque centré en 0.

7 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

7.1 Fonctions bornées

Définition. Soit E un ensemble quelconque et f une application de E dans $\mathbb{C}$.
On dit que f est bornée sur E si et seulement si $\{f(x)/x \in E\}$ est une partie bornée de $\mathbb{C}$.

Notation. Soit f une application d'un ensemble E dans $\mathbb{C}$.
On note $\begin{array}{rccc} \mathrm{Re}(f) : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{Re}(f(x)) \end{array}$ et $\begin{array}{rccc} \mathrm{Im}(f) : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{Im}(f(x)) \end{array}$. On les appelle les parties réelle et imaginaire de l'application f.

Propriété. Avec ces notations, f est bornée sur E si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont bornées.

7.2 Dérivation

Définition. Soit I un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une application. On verra plus loin que f est continue (resp : dérivable, k fois dérivable, de classe C^k où $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$) si et seulement si les applications $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues (resp : dérivables, k fois dérivables, de classe C^k où $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$). De plus, lorsque f est k fois dérivable, où $k \in \mathbb{N}^*$, on verra que,
pour tout $t \in I$, $f^{(k)}(t) = [\mathrm{Re}(f)]^{(k)}(t) + i[\mathrm{Im}(f)]^{(k)}(t)$.

Propriété. Les formules suivantes, déjà admises pour des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont aussi valables pour des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, ainsi que nous le démontrerons plus tard.
Les fonctions qui interviennent dans ces formules sont toutes supposées dérivables sur un intervalle. On se limite éventuellement à un sous-intervalle pour s'assurer que les quantités qui interviennent dans les formules sont bien définies. :
- Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.
- $(fg)' = f'g + fg'$.
- $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$.
- $\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - g'f}{g^2}$.
- Si $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, alors $(f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)$.
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(f^n)' = nf' \times f^{n-1}$.

Formule de Leibniz : Soient f et g deux applications d'un intervalle I dans $\mathbb{C}$. Si f et g sont n fois dérivables sur I, alors fg est n fois dérivable sur I et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

7.3 Intégration

Définition. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une application continue. Pour tout $a, b \in I$, on pose

$$\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\ dt + i \int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\ dt.$$

Remarque. Ainsi, $\mathrm{Re}\Big(\int_a^b f(t)\ dt\Big) = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\ dt$ et $\mathrm{Im}\Big(\int_a^b f(t)\ dt\Big) = \int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\ dt$.

On admettra pour le moment que les intégrales vérifient les propriétés suivantes :

Propriété. Soit I un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.
Soit f et g deux applications continues de I dans $\mathbb{C}$. Soit $a, b \in I$.

- Linéarité : Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$.
- Relation de Chasles : Pour tout $c \in I$, $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f + \int_c^b f$.
- Inégalité triangulaire : $\left|\int_a^b f(t)\ dt\right| \leq \int_{\min(a,b)}^{\max(a,b)} |f(t)|\ dt$.

Définition. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{C}$ que l'on suppose continue.
On dit que F est une primitive de f sur I si et seulement si F est dérivable et $F' = f$.
Si F_0 est une primitive de f, alors les autres primitives de f sont exactement les applications $F_0 + k$, où k est une fonction constante.

Théorème : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{C}$ que l'on suppose continue.
Soit $x_0 \in I$. Alors $x \longmapsto \int_{x_0}^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en x_0.

Corollaire. Soit f une application continue d'un intervalle I dans $\mathbb{C}$.
Si F est une primitive de f, alors pour tout $a, b \in I$, $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \stackrel{\Delta}{=} [F(t)]_a^b$.

Corollaire. Si f est C^1 de I dans $\mathbb{C}$, pour tout $a, b \in I$, $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$.

Notation. L'écriture "$\int f(t)\ dt = F(t) + k, t \in I$" signifiera que f est continue de I dans $\mathbb{C}$ et que l'ensemble des primitives de f est $\{F + k / k \in \mathbb{C}\}$.

Changement de variable :
si $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue et si $\varphi : J \longrightarrow I$ est de classe C^1, alors $\forall (\alpha, \beta) \in J^2$
$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$. Cette égalité correspond au changement de variable $x = \varphi(t)$.

Intégration par parties : soit $u : I \longrightarrow \mathbb{C}$ et $v : I \longrightarrow \mathbb{C}$ deux applications de classe C^1 sur I.
Pour tout $(a, b) \in I^2$, $\int_a^b u(t)v'(t)\ dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\ dt$.
On a aussi : $\int u(t)v'(t)\ dt = u(t)v(t) - \int u'(t)v(t)\ dt,\ \ t \in I$.

Théorème. Formule de Taylor avec reste intégral.
Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une application de classe C^{k+1} sur $[a, b]$. Alors

$$f(b) = f(a) + \sum_{h=1}^{k} \frac{(b-a)^h}{h!} f^{(h)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)dt.$$

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$.

Il faut savoir le démontrer.

8 L'exponentielle complexe

Définition. Une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de complexes converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |z_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

On dit que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Définition. La série de complexes $\sum z_n$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente. On note alors $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} z_k$.

Propriété. Si $\sum z_n$ est une série convergente de complexes, alors $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
La réciproque est fausse : on peut avoir $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors que la série $\sum z_n$ diverge.
Il faut savoir le démontrer.

Théorème. Si $\sum |z_n|$ converge alors $\sum z_n$ est une série convergente. On dit alors que la série $\sum z_n$ est absolument convergente.
Il faut savoir le démontrer.

Définition. Pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente. Ceci permet de prolonger l'exponentielle réelle sur $\mathbb{C}$, en convenant que $\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$.

Propriété. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes qui converge vers $\ell \in \mathbb{C}$. Alors $\overline{z_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \overline{\ell}$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{(e^z)} = e^{\overline{z}}$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Pour tout $u, v \in \mathbb{C}$, $e^u e^v = e^{u+v}$.
Il faut savoir le démontrer.

Corollaire. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$ et $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$.

Propriété. $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$.
Il faut savoir le démontrer.

Théorème. $e^z \in \mathbb{U} \iff z \in i\mathbb{R}$.
Formules d'Euler :

$$\boxed{\cos\theta \triangleq \mathrm{Re}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta \triangleq \mathrm{Im}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}.$$

De plus,

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}.$$

Propriété. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!}$ et $\sin\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
Il faut savoir le démontrer.

Corollaire. sin est une fonction impaire et cos est une fonction paire.
cos et sin sont de classe C^∞ et $\cos' = -\sin$, $\sin' = \cos$.
Il faut savoir le démontrer.
Formule circulaire : Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Formule d'addition : $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Définition. On appelle série alternée toute série réelle de la forme $\sum (-1)^n \alpha_n$ ou $\sum (-1)^{n+1} \alpha_n$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \in \mathbb{R}_+$.

Théorème spécial des séries alternées (TSSA).
Soit $\sum a_n$ une série alternée. On dit qu'elle est spéciale alternée lorsque la suite $(|a_n|)$ est décroissante et tend vers 0. Dans ce cas, $\sum a_n$ est convergente.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=n}^{+\infty} a_k$ est du signe de son premier terme a_n et $|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k| \leq |a_{n+1}|$.

Propriété. L'application cos est strictement décroissante sur $]0,2]$ et elle possède un unique zéro sur $]0,2]$, que l'on notera $\frac{\pi}{2}$: c'est la **définition** de π.