Feuille d'exercices 8.
Corrigé de quelques exercices.

Exercice 8.17 :

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Posons $E_N = E \cap \mathbb{N}_N$.
$E_N \supset \{n^2 \ / \ n \in \mathbb{N}^*, n^2 \leq N\} = \{n^2 \ / \ 1 \leq n \leq \sqrt{N}\}$, donc $|E_N| \geq \lfloor \sqrt{N} \rfloor \geq \sqrt{N} - 1$.
De plus, $E = \bigcup_{k \geq 2} \{n^k \ / \ n \in \mathbb{N}^*\}$, donc

$$\begin{aligned} E_N &= \bigcup_{k \geq 2} \{n^k \ / \ 1 \leq n \leq N^{\frac{1}{k}}\} \\ &= \{n^2 \ / \ n \in \mathbb{N}^*, n^2 \leq N\} \bigcup \bigcup_{k \geq 3} \{n^k \ / \ 2 \leq n \leq N^{\frac{1}{k}}\}. \end{aligned}$$

Or $N^{\frac{1}{k}} < 2 \iff \frac{1}{k} \ln N < \ln 2 \iff k > \dfrac{\ln N}{\ln 2}$.
Ceci prouve que $E_N = \{n^2 \ / \ n \in \mathbb{N}^*, n^2 \leq N\} \bigcup \bigcup_{3 \leq k \leq 1 + \lfloor \frac{\ln N}{\ln 2} \rfloor} \{n^k \ / \ 2 \leq n \leq N^{\frac{1}{k}}\}$. On en déduit que $|E_N| \leq \lfloor \sqrt{N} \rfloor + \sum_{3 \leq k \leq 1 + \lfloor \frac{\ln N}{\ln 2} \rfloor} (\lfloor N^{\frac{1}{k}} \rfloor - 1) \leq \sqrt{N} + \dfrac{\ln N}{\ln 2} N^{\frac{1}{3}}$. On dispose ainsi de l'encadrement suivant : $1 - \dfrac{1}{\sqrt{N}} \leq \dfrac{|E_N|}{\sqrt{N}} \leq 1 + \dfrac{\ln N}{\ln 2} N^{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}$. On conclut à l'aide des croissances comparées et du principe des gendarmes.

Exercice 8.20 :

L'ensemble des nombres impairs de $\{1, \ldots, n\}$ convient, donc on peut essayer de montrer que $|A| \leq \lfloor \dfrac{n+1}{2} \rfloor$, auquel cas cette majoration sera optimale.
Soit donc A une partie non vide (il en existe) satisfaisant la propriété de l'énoncé.
Posons $m = \max A$ et notons $B = \{m - x / x \in A \setminus \{m\}\}$.
Alors $|B| = |A| - 1$ et $A \cap B = \emptyset$ (sinon, il existerait $y = m - x \in A$ avec $x \in A \setminus \{m\}$, auquel cas $x + y = m$ avec $x, y, m \in A$ ce qui est faux), donc $n \geq |A| + |B| = 2|A| - 1$, donc $|A| \leq \dfrac{n+1}{2}$.

Exercice 8.23 :

1°) Pour choisir une partie de $n+1$ entiers dans $\{1, \ldots, n+p+1\}$, on commence par choisir le maximum de cette partie, qui étant strictement plus grand que n est de la

forme $n+1+k$ avec $0 \leq k \leq p$, puis on choisit les n autres éléments de la partie entre 1 et $n+k$.

2°) Pour choisir une partie de $M+N+1$ entiers dans $\{1,\dots,n+1\}$, on commence par choisir le $(N+1)$-ième élément de cette partie dans l'ordre croissant, que l'on note $k+1$, avec $0 \leq k \leq n$, puis on choisit les N éléments inférieurs à $k+1$, soit $\binom{k}{N}$ choix, et enfin on choisit les M éléments supérieurs à $k+1$, soit $\binom{n-k}{M}$ choix.