

Résumé de cours :

Semaine 3, du 19 au 23 septembre.

1 Fonctions Logarithmes et puissances

1.1 Les fonctions $\ln$ et $\exp$

La fonction Logarithme népérien : Pour tout $x > 0$, on pose $\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$.

$\ln$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. $\ln(1) = 0$.

Pour tout $x > 0$, $\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}$.

Il existe un unique $e \in \mathbb{R}$ tel que $\ln(e) = 1$. e est le nombre de Neper : $e = 2,7 \pm 10^{-1}$.

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$,

- $\ln(xy) = \ln x + \ln y$: **A savoir démontrer.**
- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$, $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$,
- $\ln(x^n) = n \ln x$,
- $\ln(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} -\infty$, $\ln(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$, $\frac{\ln(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$: **A savoir démontrer.**

La fonction exponentielle : c'est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien.

$\exp$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\exp(\ln x) = x$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(\exp(x)) = x$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{d}{dx}(\exp(x)) = \exp(x)$.

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$,

- $e^{x+y} = e^x e^y$,
- $e^0 = 1$ et $e^1 = e$,
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$,
- $e^{nx} = (e^x)^n$.
- $e^t \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} 0$, $e^t \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$. $\frac{e^t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

Représentation graphique de $\ln$ et $\exp$: **A connaître**

Logarithmes et exponentielles en base a .

— Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln_a(x) \triangleq \frac{\ln x}{\ln a}$.

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$,

- $\ln_a(xy) = \ln_a x + \ln_a y$,
- $\ln_a(1) = 0$ et $\ln_a(a) = 1$,
- $\ln_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln_a x$, $\ln_a\left(\frac{x}{y}\right) = \ln_a x - \ln_a y$,
- $\ln_a(x^b) = b \ln_a x$,
- Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $a^x \triangleq e^{x \ln a} = \exp_a(x)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln_a(a^x) = x$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $a^{\ln_a x} = x$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{d}{dx}(a^x) = (\ln a)a^x$.

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

— $a^{x+y} = a^x a^y$,

— $a^0 = 1$ et $a^1 = a$, $a^x > 0$,

— $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$,

— pour tout $b \in \mathbb{R}$, $a^{bx} = (a^x)^b$.

— Pour tout $b > 0$, $a^x b^x = (ab)^x$.

1.2 Fonctions puissances

Définition. Un monôme de degré $n \in \mathbb{N}$ est une application de la forme $x \mapsto ax^n$, où a est un paramètre réel. Cette application est définie sur $\mathbb{R}$.

Une fonction polynomiale est une somme finie de monômes.

Lorsque $n \in \mathbb{Z}$ avec $n < 0$, $x \mapsto x^n$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.

Représentation graphique de $x \mapsto x^n$ lorsque $n \in \mathbb{Z}$: **A connaître.**

Représentation graphique de $x \mapsto x^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, lorsque x décrit $\mathbb{R}_+^*$: **A connaître.**

Convention : Pour tout $b \in \mathbb{R}_+^*$, $0^b = 0$ et $\boxed{0^0 = 1}$.

2 Etude d'une fonction

2.1 Plan d'étude

Plan d'étude d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

1. Calcul du domaine de définition de f .
2. Si f est paire, impaire ou/et périodique, on peut réduire le domaine d'étude.
3. Calcul de $f'(x)$ et étude de son signe.
4. Tableau de variations de f . Indiquez notamment les limites de f aux bornes des intervalles.
5. Etude des branches infinies si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm\infty$.

2.2 Etude des branches infinies

Soit $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. On suppose que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \varepsilon\infty} \pm\infty$.

1. S'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \varepsilon\infty} \mu$, on dit que le graphe de f admet une direction asymptotique de pente μ .
 - S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) - \mu x \xrightarrow{x \rightarrow \varepsilon\infty} \alpha$, la droite affine d'équation $y = \mu x + \alpha$ est une asymptote de la courbe au voisinage de $\varepsilon\infty$.
 - Si $f(x) - \mu x \xrightarrow{x \rightarrow \varepsilon\infty} \pm\infty$, on dit que le graphe de f présente au voisinage de $\varepsilon\infty$ une branche parabolique de pente μ .
En particulier, lorsque $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \varepsilon\infty} 0$, on est en présence d'une branche parabolique horizontale.
 - Autres cas : il y a seulement une direction asymptotique.
2. Si $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \varepsilon\infty} \pm\infty$, le graphe de f admet une branche parabolique verticale.
3. Autres cas : on ne peut rien dire.

3 Déformations du graphe

Notation. f désigne une fonction de D dans $\mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}$.

Propriété. On fixe un réel a .

- Le graphe de $x \mapsto f(x) + a$ se déduit du graphe de f par la translation de vecteur $a\vec{j}$.
- Le graphe de $x \mapsto f(x + a)$ se déduit du graphe de f par la translation de vecteur $-a\vec{i}$. **A savoir établir.**
- Le graphe de $x \mapsto f(a - x)$ se déduit du graphe de f par la symétrie orthogonale selon la droite verticale d'abscisse $\frac{a}{2}$.
- Le graphe de $x \mapsto f(ax)$ se déduit du graphe de f par l'affinité orthogonale d'axe invariant Oy et de coefficient $\frac{1}{a}$, qui correspond, en identifiant un point avec le couple de ses coordonnées, à la transformation $(x, y) \mapsto (\frac{x}{a}, y)$ (**A savoir établir**). Ceci a pour effet,
 - lorsque $a > 1$, d'écraser le graphe de f d'un facteur a vers l'axe des ordonnées, parallèlement à l'axe Ox ,
 - lorsque $0 < a < 1$, d'étirer le graphe de f d'un facteur $\frac{1}{a}$ autour de l'axe Oy , parallèlement à l'axe Ox .
- Le graphe de $x \mapsto af(x)$ se déduit du graphe de f par une affinité d'axe invariant Ox et de coefficient a , i.e par la transformation $(x, y) \mapsto (x, ay)$.

4 Trigonométrie hyperbolique

Définition. On définit les fonctions usuelles suivantes :

- cosinus hyperbolique : $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$,
- sinus hyperbolique : $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$,
- tangente hyperbolique : $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

Propriété. Les fonctions sh , ch et th sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$, $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$, $\operatorname{th}'(x) = 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

Il faut connaître les graphes de sh , ch et th .

Toute formule de la trigonométrie circulaire est associée avec une formule duale de la trigonométrie hyperbolique. Cependant, le programme officiel se limite à la formule suivante :

Formule : $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

Mais il n'est pas interdit de connaître quelques formules de trigonométrie hyperbolique :

- $\operatorname{ch}(a + b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$,
- $\operatorname{sh}(a + b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b$,
- $\operatorname{ch}^2 a = \frac{\operatorname{ch}(2a) + 1}{2}$, $\operatorname{sh}^2 a = \frac{\operatorname{ch}(2a) - 1}{2} \geq 0$.

5 Applications trigonométriques réciproques

Les graphes des fonctions usuelles de ce chapitre sont à connaître.

5.1 Trigonométrie circulaire

La fonction arcsin : l'application $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ est surjective, continue et strictement croissante. On note arcsin son application réciproque, de $[-1, 1]$ dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Elle est continue, impaire et strictement croissante sur $[-1, 1]$.

La restriction de $\sin$ à $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est un C^∞ -difféomorphisme sur $] -1, 1[$, dont le C^∞ -difféomorphisme réciproque est la restriction de arcsin à $] -1, 1[$.

Pour tout $x \in] -1, 1[$, $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

La fonction arccos : l'application $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ est surjective, continue et strictement décroissante. On note arccos son application réciproque, de $[-1, 1]$ dans $[0, \pi]$. Elle est continue et strictement décroissante sur $[-1, 1]$.

La restriction de $\cos$ à $]0, \pi[$ est un C^∞ -difféomorphisme sur $] -1, 1[$, dont le C^∞ -difféomorphisme réciproque est la restriction de arccos à $] -1, 1[$.

Pour tout $x \in] -1, 1[$, $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Propriété. $\forall t \in [-1, 1] \quad \cos(\arccos t) = t$ et $\sin(\arcsin t) = t$, mais en général, $\arccos(\cos t) \neq t$. Plus précisément, $\arccos(\cos t) = t \iff t \in [0, \pi]$.

Ainsi, lorsque $t \notin [0, \pi]$, $\arccos(\cos t) = t_0$ où $t_0 \in [0, \pi]$ et $\cos t = \cos t_0$.

La fonction arctan : l'application $\tan :] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ est un C^∞ -difféomorphisme strictement croissant, dont le C^∞ -difféomorphisme réciproque est noté.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

5.2 Trigonométrie hyperbolique

Les fonctions réciproques des fonctions ch, sh et th ne sont pas au programme.

La fonction argsh : sh est un C^∞ -difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dont le difféomorphisme réciproque est noté argsh ("argument sinus hyperbolique"). Ainsi argsh est une application C^∞ , impaire, strictement croissante. $\argsh'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

A savoir établir : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\argsh x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

La fonction argch : L'application ch est une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $[1, +\infty[$. Son application réciproque est notée argch. C'est une bijection continue strictement croissante de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$.

ch est un C^∞ -difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]1, +\infty[$, donc argch est C^∞ sur $]1, +\infty[$.

$\argch'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. Pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\argch x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.

La fonction argth : th est un C^∞ -difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $] -1, 1[$, dont le difféomorphisme réciproque est noté argth. Ainsi argth est une application C^∞ , impaire, strictement croissante de $] -1, 1[$ dans $\mathbb{R}$. $\argth'(x) = \frac{1}{1-x^2}$. Pour tout $x \in] -1, 1[$, $\argth x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

6 Calculs d'intégrales

6.1 Changement de variables

Théorème. On suppose que f est une application continue d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$, et que φ est une application **de classe** C^1 d'un intervalle J dans I . Alors,

$$\forall (\alpha, \beta) \in J^2 \quad \boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx.} \quad (1)$$

Lorsque l'on remplace un membre de cette égalité par l'autre, on dit que l'on effectue le changement de variable $x = \varphi(t)$.

Démonstration à connaître.

Propriété. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et soit f une application continue sur $[-a, a]$.

Si f est paire, alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$. Si f est impaire, $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$.

Théorème. Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que f est une fonction continue et T -périodique définie sur $\mathbb{R}$.

Alors, $\forall t_0 \in \mathbb{R} \quad \int_0^T f(t) dt = \int_{t_0}^{T+t_0} f(t) dt$.

Démonstration à connaître.

6.2 Intégration par parties

Théorème. Soit $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $v : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications de classe C^1 sur I .

Pour tout $(a, b) \in I^2$, $\int_a^b u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt$.

Démonstration à connaître.

Théorème. Soit $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $v : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications de classe C^1 sur I .

Alors, $\int u(t)v'(t) dt = u(t)v(t) - \int u'(t)v(t) dt, \quad t \in I$.