Résumé de cours :
Semaine 9, du 14 au 18 novembre.

1 Dénombrement (début)

1.1 Définition du cardinal d'un ensemble

Définition. Soit E un ensemble. S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{N}_n$ est en bijection avec E, alors n est unique. On dit que n est le cardinal de E. Il est noté $\mathrm{card}(E)$ ou bien $\#E$, ou encore $|E|$.
En cas d'inexistence d'un tel entier n, on dit que E est infini.

Exemple. Pour tout $n, m \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{Card}(\llbracket n, m \rrbracket) = m - n + 1$.

Propriété. Soit A un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$ et soit B un ensemble quelconque.
B est fini de cardinal n si et seulement si il existe une bijection de A sur B.

Propriété. Soit A un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Soit B une partie de A.
Alors B est un ensemble fini et $|B| \le |A|$, avec égalité si et seulement si $B = A$.

Propriété. Soit A une partie de $\mathbb{N}$. A est finie si et seulement si elle est majorée.
En particulier, $\mathbb{N}$ est infini.

2 Cardinaux d'ensembles usuels

Propriété. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une réunion *disjointe* de n ensembles finis est finie et son cardinal est égal à la somme des cardinaux de ces ensembles.

Propriété. Soit E un ensemble fini et A une partie de E. Alors $|E \setminus A| = |E| - |A|$.

Propriété. Soit E un ensemble fini et R une relation d'équivalence sur E.
Alors E/R est aussi de cardinal fini, inférieur au cardinal de E.

Formule :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. **Formule du crible :** (Hors programme)

$$\begin{aligned}\#\Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big) &= \sum_{i=1}^{n} \#E_i - \sum_{1 \le i < j \le n} \#(E_i \cap E_j) + \cdots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} \#\big(\bigcap_{j=1}^{k} E_{i_j}\big) \\ &\quad + \cdots + (-1)^{n+1} \#\big(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\big).\end{aligned}$$

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Le cardinal du produit cartésien de n ensembles finis est égal au produit des cardinaux de ces ensembles.
Il faut savoir le démontrer.

Formule : $|\mathcal{F}(E,F)| = |F|^{|E|}$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Si E est de cardinal n, alors $\mathcal{P}(E)$ est de cardinal 2^n.
Il faut savoir le démontrer.

3 Sommes et produits finis

Formules :

— Pour tout $a \in G$ et $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a = na$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Notation. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S}_n$ désigne l'ensemble des bijections de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_n$, que l'on appelle des permutations sur $\mathbb{N}_n$.

Commutativité généralisée : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x_1, \dots, x_n \in G$. Alors, $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{\sigma(j)}$.

Définition. Soit A un ensemble fini et $(x_a)_{a\in A}$ une famille de G indexée par A.

Notons $n = |A|$. Il existe une bijection f de $\mathbb{N}_n$ dans A. On pose $\displaystyle\sum_{a\in A} x_a \triangleq \sum_{i=1}^{n} x_{f(i)}$.

Cette quantité ne dépend pas de la bijection f.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété d'additivité : Soit A un ensemble fini, $(x_a)_{a\in A}$ et $(y_a)_{a\in A}$ deux familles d'éléments de G indexées par A. Alors $\displaystyle\sum_{a\in A}(x_a + y_a) = \Big(\sum_{a\in A} x_a\Big) + \Big(\sum_{a\in A} y_a\Big)$.

Distributivité généralisée : Soit A un ensemble fini, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $(x_a)_{a\in A}$une famille de *complexes* indexée par A. Alors $\displaystyle\sum_{a\in A}(\lambda x_a) = \lambda \sum_{a\in A} x_a$.

Changement de variable dans une somme finie : Soit B un ensemble fini, $(x_b)_{b\in B}$ une famille d'éléments de G. Soit φ une bijection d'un ensemble A dans B. Alors $\displaystyle\sum_{b\in B} x_b = \sum_{a\in A} x_{\varphi(a)}$.

Il faut savoir le démontrer.

Formule : calcul d'une somme géométrique .

Soit $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, soit $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leq n$. Alors $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} q^k = \frac{q^m - q^{n+1}}{1-q}$.

Il faut savoir le démontrer.

Théorème. Soit $(G, \times)$ un groupe commutatif fini. Alors, pour tout $g \in G$, $g^{|G|} = 1_G$.
Il faut savoir le démontrer.

Remarque. Ce théorème est encore vrai lorsque G n'est pas commutatif (cf plus loin).

Sommation par paquets : Soit A un ensemble fini et $(x_a)_{a\in A}$ une famille d'éléments de G. On suppose qu'il existe un ensemble fini B et une famille $(A_b)_{b\in B}$ de parties de A telles que $A = \bigsqcup_{b\in B} A_b$.

Alors $\sum_{a\in A} x_a = \sum_{b\in B}\sum_{a\in A_b} x_a$.

Sommation par paquets, seconde formulation : Soit A un ensemble fini et $(x_a)_{a\in A}$ une famille d'éléments de G. Soit R une relation d'équivalence sur A. Alors $\sum_{a\in A} x_a = \sum_{c\in A/R}\sum_{a\in c} x_a$.

4 Applications et cardinaux

Notation. Considérons une application f de E dans F, où E est de cardinal fini.

Propriété. Soit E un ensemble fini et f une application de E dans un ensemble quelconque F. Alors $f(E)$ est fini. De plus,
$|f(E)| \leq |E|$, avec égalité si et seulement si f est injective, et
$|f(E)| \leq |F|$, avec égalité si et seulement si f est surjective.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit E et F deux ensembles finis *de même cardinal*. Soit f une application de E dans F. Alors f injective $\iff f$ surjective $\iff f$ bijective .

Propriété. Soit A et B deux ensembles.
S'il existe une injection de A dans B et si B est fini, alors A est fini et $|A| \leq |B|$.
S'il existe une surjection de A dans B et si A est fini, alors B est fini et $|A| \geq |B|$.

Principe des tiroirs : Si l'on doit ranger p objets dans n tiroirs et que $p > n$, alors il existe au moins 2 objets qui seront dans le même tiroir.
Plus généralement, si $p > cn$, où $c \in \mathbb{N}^*$, il existe un tiroir qui contient plus de $c + 1$ objets.
Il faut savoir le démontrer.

Principe des bergers : Soit E et F des ensembles finis et $f : E \longrightarrow F$ une application. On suppose que tout élément de F possède exactement k antécédents par f. Alors $|E| = k|F|$.
Il faut savoir le démontrer.

4.1 Ensembles dénombrables

Définition. Un ensemble est dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Propriété. Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Propriété. On dit qu'un ensemble est au plus dénombrable si et seulement si il est fini ou dénombrable.
Un ensemble est au plus dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

Lemme technique : Un ensemble I est fini ou dénombrable si et seulement s'il existe une suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties finies de I dont la réunion est égale à I.
Dans ce cas, on dira que $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite adaptée à I.

Corollaire. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.
Il faut savoir le démontrer.

> **Exercice.** Montrer que $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable.
> *Solution.* À connaître.

Propriété. Une réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Propriété. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Hors programme : $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

4.2 Listes et combinaisons

Vocabulaire : Soit E un ensemble et $p \in \mathbb{N}$.
- Une p-liste (aussi appelée un p-uplet) d'éléments de E est un élément de E^p.
- Un p-arrangement d'éléments de E est une p-liste dont les éléments sont deux à deux distincts.
- Une p-combinaison de E est une partie de E de cardinal p.

Propriété. Le nombre de p-listes d'éléments de E est égal à n^p (c'est $|E|^p$).

Propriété. Si $a = (e_1, \ldots, e_p)$ est un p-arrangement de E, l'application $\begin{array}{rccc} f_a : & \mathbb{N}_p & \longrightarrow & E \\ & i & \longmapsto & e_i \end{array}$ est une injection. De plus, $a \longmapsto f_a$ est une bijection de l'ensemble A_p des p-arrangements de E vers l'ensemble I_p des injections de $\mathbb{N}_p$ dans E.
Il faut savoir le démontrer.

Théorème. Le nombre de p-arrangements dans un ensemble de cardinal n est égal à $n(n-1)\cdots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$. C'est aussi le nombre d'injections d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments.

Corollaire. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\mathcal{S}_n| = n!$. Plus généralement, factorielle de n est le nombre de bijections d'un ensemble de cardinal n dans un autre ensemble de cardinal n.

Théorème. Le nombre de p-combinaisons d'éléments d'un ensemble de cardinal n, c'est-à-dire le nombre de parties de p éléments incluses dans un ensemble de cardinal n est égal à

$$\binom{n}{p} \triangleq \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}.$$

Cette quantité s'appelle le coefficient binomial "p parmi n".
Il faut savoir le démontrer.

4.3 Les coefficients binomiaux

Formule : $\forall n, p \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq p \leq n$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

Formule comité-président : Pour tout $n, k \in \mathbb{N}^*$ avec $k \leq n$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
La preuve combinatoire est à connaître.

Formule comité-bureau : si $p \leq k \leq n$, $\binom{k}{p} \times \binom{n}{k} = \binom{n}{p} \times \binom{n-p}{k-p}$.
La preuve combinatoire est à connaître.

Formule du triangle de Pascal : $\forall n, p \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq p < n$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$.
La preuve combinatoire est à connaître.

Remarque. Il est souvent pratique de convenir que, pour tout $n, p \in \mathbb{Z}$ tels que $\neg(0 \leq p \leq n)$, $\binom{n}{p} = 0$.

Représentation graphique du triangle de Pascal : À connaître.

Formule du binôme de Newton : On se place dans un anneau $(A, +, \times)$. Soit a_1 et a_2 deux éléments de A qui commutent, c'est-à-dire tels que $a_1 a_2 = a_2 a_1$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ (a_1 + a_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_1^k \ a_2^{n-k}.$$

Les deux preuves sont à connaître.