

Résumé de cours :
Semaine 20 : lundi 13 et mardi 14 février.

Topologie dans un espace métrique (fin)

Pour tout ce chapitre, on fixe un espace métrique (E, d) non vide.

1 Les compacts (suite et fin)

Corollaire. Soient $p \in \mathbb{N}^*$, E_1, \dots, E_p p \mathbb{K} -espaces vectoriels normés et A_1, \dots, A_p p compacts respectivement dans E_1, \dots, E_p . Alors $A_1 \times \dots \times A_p$ est un compact de $E_1 \times \dots \times E_p$.

Il faut savoir le démontrer.

Théorème (hors programme) : Caractérisation de la compacité par la propriété de Borel Lebesgue. Soit A une partie de E . Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) A est compact.

ii) Pour tout ensemble I et pour toute famille d'ouverts $(U_i)_{i \in I}$ telle que $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, il existe une

partie J finie de I telle que $A \subset \bigcup_{i \in J} U_i$: de tout recouvrement de A par des ouverts, on peut en extraire un recouvrement fini.

iii) Pour tout ensemble I et pour toute famille de fermés $(F_i)_{i \in I}$ telle que $A \cap \bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, il existe une

partie J finie de I telle que $A \cap \bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset$.

Propriété. Si $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$, alors l'ensemble $\{x_n/n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est un compact de E .

Il faut savoir le démontrer.

Limite en un point

On fixe deux espaces métriques E et F , ainsi qu'une fonction $f : E \rightarrow F$, dont le domaine de définition sera noté \mathcal{D}_f .

Notation. On fixe une partie A de \mathcal{D}_f . On fixe également a , qui peut être infini. On suppose qu'il existe au moins une suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$. On fixe aussi l dans $F \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$.

2 Caractérisation séquentielle

Définition. $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a en appartenant à A si et seulement si

$$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \left(x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a \implies f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l \right). \text{ Dans ce cas, on note } f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} l.$$

Propriété. Lorsque E et F sont des espaces vectoriels normés, si l'on remplace l'une des normes sur E ou F par une norme équivalente, la condition $f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} l$ est inchangée.

Propriété. Unicité de la limite. Si $F \neq \mathbb{R}$, on impose que $l, l' \in F \cup \{\infty\}$ et si $F = \mathbb{R}$, on impose que $l, l' \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$: Si $f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} l$ et $f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} l'$, alors $l = l'$.

Propriété. On suppose que $F = \mathbb{C}$ et que $l \in \mathbb{C}$.

Alors $f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} l$ si et seulement si $(\operatorname{Re}(f)(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} \operatorname{Re}(l)) \wedge (\operatorname{Im}(f)(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} \operatorname{Im}(l))$.

Propriété. Si $A \subset B \subset \mathcal{D}_f$ et si $f(x) \xrightarrow[x \in B]{x \rightarrow a} l$, alors $f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} l$.

3 Caractérisation par “ ε ”

Propriété. Si $a \in E$ et $l \in F$,

$$f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} l \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \forall x \in A (d(x, a) \leq \alpha \implies d(f(x), l) \leq \varepsilon).$$

Il faut savoir le démontrer.

Remarque. Dans (1), on peut prendre les deux dernières inégalités indifféremment strictes ou larges.

Propriété. On peut adapter cette caractérisation dans le cas où a et l sont éventuellement infinis.

On obtient par exemple :

— Si $l \in F$ et $E = \mathbb{R}$,

$$f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow +\infty} l \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \exists M \in \mathbb{R}_+^* \forall x \in A (x \geq M \implies \|f(x) - l\| < \varepsilon).$$

— Si $a \in E$ et $F = \mathbb{R}$,

$$f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}_+^* \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \forall x \in A (\|x - a\| \leq \alpha \implies f(x) \geq M).$$

— Si $a = \infty$ et $l \in F$, en choisissant $e_0 \in E$,

$$f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow \infty} l \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \exists M \in \mathbb{R}_+^* \forall x \in A (d(x, e_0) \geq M \implies d(f(x), l) \leq \varepsilon).$$

— Si $a = \infty$ et $l = \infty$, en fixant $e_0 \in E$ et $f_0 \in F$, $f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow \infty} \infty$ si et seulement si

$$\forall M \in \mathbb{R}_+^* \exists N \in \mathbb{R}_+^* \forall x \in A (d(x, e_0) \geq N \implies d(f(x), f_0) \geq M).$$

Remarque. Une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ peut être vue comme la fonction $\begin{matrix} \mathbb{N} & \longrightarrow & E \\ n & \longmapsto & x_n \end{matrix}$, définie sur \mathbb{N} qui est une partie non majorée de \mathbb{R} . La notion de limite d'une suite dans un espace métrique devient donc un cas particulier de la notion de limite d'une fonction en $+\infty$.

4 Caractérisation par voisinages

Définition. Dans \mathbb{R} , on appelle voisinage de $+\infty$ toute partie contenant un intervalle $]c, +\infty[$ où $c \in \mathbb{R}$ et voisinage de $-\infty$ toute partie contenant un intervalle $] -\infty, c[$.

Ainsi $\mathcal{V}(+\infty) = \{V \subset \mathbb{R} / \exists c \in \mathbb{R}]c, +\infty[\subset V\}$ et $\mathcal{V}(-\infty) = \{V \subset \mathbb{R} / \exists c \in \mathbb{R}] -\infty, c[\subset V\}$.

Définition. On suppose que E n'est pas borné. Soit $e \in E$. On appelle voisinage dans E de ∞ toute partie contenant le complémentaire d'une boule fermée centrée en e .

Ainsi $\mathcal{V}(\infty) = \{V \subset E / \exists R > 0 E \setminus B_f(e, R) \subset V\}$. On vérifie que $\mathcal{V}(\infty)$ ne dépend pas de e .

Propriété. Avec les définitions précédentes de voisinages, on a encore :

Une intersection de deux voisinages de a est un voisinage de a .

Toute partie contenant un voisinage de a est un voisinage de a .

Remarque.

Avec ces nouvelles définitions, les hypothèses portant sur a et A énoncées au début du présent paragraphe se résument ainsi : tout voisinage V de a rencontre A .

Définition. On dit que $f|_A$ vérifie une certaine propriété au voisinage de a si et seulement s'il existe un voisinage V de a tel que $f|_{V \cap A}$ vérifie cette propriété.

Lorsqu'on énonce une propriété portant sur f au voisinage de $a \in E$, on dit que c'est une propriété locale (de f au voisinage de a). Lorsqu'on énonce une propriété portant sur f au voisinage de ∞ ou de $\pm\infty$, on dit que c'est une propriété asymptotique.

Propriété. $f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} l \iff \forall V \in \mathcal{V}(l) \exists U \in \mathcal{V}(a) f(U \cap A) \subset V$.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Caractère local (ou asymptotique) de la notion de limite.

Pour tout $U_0 \in \mathcal{V}(a)$, $f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} l \iff f(x) \xrightarrow[x \in A \cap U_0]{x \rightarrow a} l$.

Ainsi la valeur de l'éventuelle limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a pour x appartenant à A ne dépend pas du comportement global de f sur A mais seulement du comportement de $f|_A$ au voisinage de a . En particulier, si l'on modifie les valeurs de $f(x)$ lorsque $x \notin U_0$, on ne modifie pas la valeur logique de la proposition $f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} l$.

Définition. Soit $a \in E$ tel que $a \in \overline{\mathcal{D}_f \setminus \{a\}}$. Ainsi, a est un point d'accumulation de \mathcal{D}_f . S'il existe $l \in F$ tel que $f(x) \xrightarrow[x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\]}{x \rightarrow a} l$, on écrit que $f(x) \xrightarrow[x \neq a]{x \rightarrow a} l$ ou même $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{x \rightarrow a} l$.

Propriété. Soient A et B deux parties de \mathcal{D}_f qui rencontrent tout voisinage de a .

Alors, $(f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} l \text{ et } f(x) \xrightarrow[x \in B]{x \rightarrow a} l) \iff f(x) \xrightarrow[x \in A \cup B]{x \rightarrow a} l$.

Il faut savoir le démontrer.

Définition. Supposons que $E = \mathbb{R}$ et que $a \in \mathbb{R}$.

• Si $a \in \overline{\mathcal{D}_f \cap]a, +\infty[}$, et si $f(x) \xrightarrow[x \in \mathcal{D}_f \cap]a, +\infty[}{x \rightarrow a} l$, on note $f(x) \xrightarrow[x > a]{x \rightarrow a} l$ ou $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a^+]{x \rightarrow a} l$ et $l = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ou $l = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$. Il s'agit de la notion de limite à droite du réel a .

• De même, si $a \in \overline{\mathcal{D}_f \cap]-\infty, a[}$, et si $f(x) \xrightarrow[x \in \mathcal{D}_f \cap]-\infty, a[}{x \rightarrow a} l$, on note $f(x) \xrightarrow[x < a]{x \rightarrow a} l$ ou $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a^-]{x \rightarrow a} l$ et $l = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ ou $l = \lim_{x < a} f(x)$. Il s'agit de la notion de limite à gauche du réel a .

Propriété. On suppose que $E = \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathcal{D}_f \cap]-\infty, a[} \cap \overline{\mathcal{D}_f \cap]a, +\infty[}$.

Alors $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{x \rightarrow a} l$ si et seulement si $f(x) \xrightarrow[x > a]{x \rightarrow a} l$ et $f(x) \xrightarrow[x < a]{x \rightarrow a} l$.

Continuité en un point

5 Définitions

Définition. Soit $a \in \mathcal{D}_f$. f est continue en a si et seulement si $f(x) \xrightarrow[x \in \mathcal{D}_f]{x \rightarrow a} f(a)$.

Propriété. On suppose que $F = \mathbb{C}$. Soit $a \in \mathcal{D}_f$.

f est continue en a si et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont continues en a .

Propriété. f est continue en a si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

i) Pour toute suite (x_n) de points de \mathcal{D}_f telle que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$, $f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(a)$.

ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall x \in \mathcal{D}_f (d(x, a) \leq \alpha \implies d(f(x), f(a)) \leq \varepsilon)$.

iii) $\forall V \in \mathcal{V}(f(a)) \exists U \in \mathcal{V}(a) f(U \cap \mathcal{D}_f) \subset V$.

Propriété. Soit $a \in \mathcal{D}_f$.

Si $a \notin \overline{\mathcal{D}_f \setminus \{a\}}$ (on dit que a est un point isolé de \mathcal{D}_f), f est toujours continue en a .

Si $a \in \overline{\mathcal{D}_f \setminus \{a\}}$, f est continue en a si et seulement si $f(x) \xrightarrow[x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}]{x \rightarrow a} f(a)$.

Remarque. Soient $a \in \mathcal{D}_f$ et $U_0 \in \mathcal{V}(a)$. f est continue en a si et seulement si $f|_{\mathcal{D}_f \cap U_0}$ est continue en a . Ainsi la notion de continuité (au point a) est une notion locale.

Définition. On dit que f est continue si et seulement si elle est continue en chaque point de son domaine de définition.

Propriété. Les applications lipschitziennes sont continues.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soient A une partie de \mathcal{D}_f et $a \in A$. Si f est continue en a , alors $f|_A$ est aussi continue en a .

Corollaire. Soit A une partie incluse dans \mathcal{D}_f . Si f est continue, alors $f|_A$ est continue.

Définition. On suppose que $E = \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathcal{D}_f$. On dit que f est continue à droite en a si et seulement si $f|_{[a, +\infty[\cap \mathcal{D}_f}$ est continue en a . On définit de même la notion de continuité à gauche.

Propriété. On suppose que $E = \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathcal{D}_f$.

f est continue en a si et seulement si f est continue à droite et à gauche en a .

Définition. On suppose que f est continue. Soit $D \supset \mathcal{D}_f$. On dit que f se prolonge par continuité sur D si et seulement s'il existe une application $\tilde{f} : D \rightarrow F$ continue et telle que $\tilde{f}|_{\mathcal{D}_f} = f$.

Définition. Soit $a \in \overline{\mathcal{D}_f} \setminus \mathcal{D}_f$. f admet un prolongement par continuité en a si et seulement si f admet une limite finie en a . Dans ce cas, l'unique prolongement par continuité \tilde{f} de f est donné par $\tilde{f}(a) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x)$.

Propriété. Soient $A \subset E$ et f et g deux applications continues de A dans F .

Si f et g coïncident sur une partie dense dans A , alors $f = g$.

Il faut savoir le démontrer.

6 Théorèmes de composition

Notation. Dans ce paragraphe, on fixe un troisième espace métrique noté G et une seconde fonction $g : F \rightarrow G$, définie sur \mathcal{D}_g .

Propriété. Soit B une partie de \mathcal{D}_g telle que $f(A) \subset B$. Soit $m \in G \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$.

Pour que $g(f(x)) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} m$, il suffit que $f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} l$ (auquel cas B rencontre tout voisinage de l) et que

$$g(y) \xrightarrow[y \in B]{y \rightarrow l} m.$$

Corollaire. On suppose que $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$ et on fixe $a \in \mathcal{D}_f$.

Si f est continue en a et g en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a .

Corollaire. On suppose que $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$.

Si f et g sont continues, alors $g \circ f$ est continue (et définie sur \mathcal{D}_f).

Corollaire. On suppose que $f(A) \subset \mathcal{D}_g$. Si $f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} b$ et si g est continue en b , alors $g(f(x)) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} g(b)$.

Propriété. Limite en un point d'une application à valeurs dans un produit.

Supposons que $F = F_1 \times \cdots \times F_q$, où F_1, \dots, F_q sont des espaces vectoriels normés et notons

$$f : E \rightarrow F \\ x \mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_q(x)).$$

Soient A une partie de \mathcal{D}_f , $a \in \overline{A}$ et $l = (l_1, \dots, l_q) \in F$. Alors,

$$f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} l \text{ si et seulement si pour tout } i \in \mathbb{N}_q, f_i(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} l_i.$$

Propriété. Continuité en un point d'une application à valeurs dans un produit.

Supposons que $F = F_1 \times \cdots \times F_q$, où F_1, \dots, F_q sont des espaces vectoriels normés et notons

$$f : E \rightarrow F \\ x \mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_q(x)). \text{ Soit } a \in \mathcal{D}_f. \text{ Alors,}$$

f est continue en a si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{N}_q$, f_i est continue en a .