Résumé de cours :
Semaine 29, les 15 et 16 mai.

1 Sommes et sommes directes

Définition. Si les E_i sont des sev de E, $E_1 + \cdots + E_k = \text{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right)$.

Propriété. $E_1 + \cdots + E_k = \left\{ \sum_{i=1}^{k} x_i \ / \ \forall i \in \{1, \ldots, k\} \quad x_i \in E_i \right\}$.

Définition. $\sum_{i=1}^{k} E_i$ est ***directe***, et alors notée $\bigoplus_{1 \le i \le k} E_i$, si et seulement si

$\forall (x_1, \ldots, x_k) \in E_1 \times \cdots \times E_k \quad \left(\sum_{i=1}^{k} x_i = 0 \Longrightarrow (\forall i \in \{1, \ldots, k\} \ \ x_i = 0) \right)$,

ce qui est équivalent à : $\forall x \in \sum_{i=1}^{k} E_i$, $\exists!(x_1, \ldots, x_k) \in E_1 \times \cdots \times E_k \quad x = \sum_{i=1}^{k} x_i$.

2 Supplémentaires d'un sous-espace vectoriel

Propriété. $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.

Propriété. Si $x \notin F$, F et $\mathbb{K}x$ sont en somme directe.
Deux droites vectorielles distinctes sont en somme directe.

Définition. Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont ***supplémentaires*** (dans E) si et seulement si $E = F \oplus G$, i.e $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$, i.e $\forall x \in E, \ \ \exists!(x_1, x_2) \in F \times G, \ \ x = x_1 + x_2$.

Propriété. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. F admet au moins un supplémentaire, et pour tout supplémentaire G de F, $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

Remarque. En dimension quelconque, tout sous-espace vectoriel de E possède au moins un supplémentaire, si l'on accepte l'axiome du choix.

Propriété. $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$: $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \ \ M = \frac{1}{2}(M + {}^tM) + \frac{1}{2}(M - {}^tM)$.
De plus $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n-1)}{2}$.
Il faut savoir le démontrer.

3 Propriétés des sommes directes

3.1 Un moyen de définir une application linéaire

Théorème. Soit $(E_i)_{1\leq i\leq k}$ une famille de k sous-espaces vectoriels de E telle que $E = \bigoplus_{1\leq i\leq k} E_i$. Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et, pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, soit u_i une application linéaire de E_i dans F.
Il existe une unique application linéaire u de E dans F telle que, pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, la restriction de u à E_i est égale à u_i. Ainsi, pour définir une application linéaire u de E dans F, il suffit de préciser ses restrictions aux sous-espaces vectoriels E_i.

3.2 Formules dimensionnelles

Propriété. $\dim\left(\sum_{i=1}^{k} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} \dim(E_i)$, $\boxed{\text{avec égalité si et seulement si la somme est directe}}$.
Il faut savoir le démontrer.

Remarque. Ainsi, lorsque E est de dimension finie, si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, ils sont supplémentaires dans E si et seulement si $E = F + G$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

Formule de Grassmann : $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.
Il faut savoir le démontrer.

3.3 Associativité des sommes directes

Propriété. ***Associativité d'une somme directe.*** Si $(I_i)_{1\leq i\leq p}$ est une partition de $\{1, \ldots, k\}$, alors $E_1, \ldots, E_k$ forment une somme directe si et seulement si $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$, $(E_j)_{j\in I_i}$ forment une somme directe et $\left(\bigoplus_{j\in I_i} E_j\right)_{i\in\{1,\ldots,p\}}$ forment une somme directe.

Théorème. Soient k un entier supérieur ou égal à 2, et $(E_i)_{1\leq i\leq k}$ une famille de k sous-espaces vectoriels de E. $E_1, \ldots, E_k$ sont en somme directe si et seulement si $\forall i \in \{2, \ldots, k\}$ $E_i \bigcap \sum_{j=1}^{i-1} E_j = \{0\}$.

3.4 Base adaptée à une décomposition en somme directe

Théorème. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $(e_i)_{i\in I}$. Soit $(I_k)_{1\leq k\leq n}$ une partition de I. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $E_k = \text{Vect}(e_i)_{i\in I_k}$. Alors $E = \bigoplus_{k=1}^{n} E_k$.

Théorème réciproque. Soit $(E_k)_{1\leq k\leq n}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que $E = \bigoplus_{k=1}^{n} E_k$. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on suppose que E_k admet une base b_k. Alors la concaténation des bases $(b_k)_{1\leq k\leq n}$, notée b, est une base de E. On dit que b est une ***base adaptée à la décomposition en somme directe*** $E = \bigoplus_{k=1}^{n} E_k$.

Définition. Lorsque F est un sous-espace vectoriel de E, on appelle ***base de*** E ***adaptée*** à F toute base obtenue en complétant une base de F.

4 Les projecteurs

Définition. $p \in L(E)$ est un ***projecteur*** si et seulement si $p^2 = p$.

Propriété. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
Pour $x \in E$, on note $(p(x), q(x))$ l'unique couple de $F \times G$ tel que $x = p(x) + q(x)$.
p et q sont des projecteurs.
p est appelé le projecteur sur F parallèlement à G, et q le ***projecteur associé*** à p.
On vérifie que $p + q = Id_E$ et $pq = qp = 0$.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété réciproque. Soit p un projecteur de E. Alors p est le projecteur sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{Ker}(p)$. La décomposition de $x \in E$ selon la somme directe $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$ est $x = p(x) + (x - p(x))$, avec $p(x) \in F = \text{Im}(p)$ et $x - p(x) \in G = \text{Ker}(p)$.
Pour tout $x \in E$, $\boxed{x = p(x) \Longleftrightarrow x \in F}$: $F = \text{Ker}(Id_E - p)$.
Il faut savoir le démontrer.

Définition. $s \in L(E)$ est une ***symétrie*** si et seulement si $s^2 = Id_E$.

Propriété. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
L'unique application s de E dans E telle que, pour tout $f, g \in F \times G$, $s(f+g) = f - g$ est une symétrie, appelée symétrie par rapport à F parallèlement à G. Si l'on note p le projecteur sur F parallèlement à G, et q le projecteur associé à p, alors $s = p - q = 2p - Id_E$.

Propriété réciproque. On suppose que $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$.
Pour toute symétrie s de E, il existe deux sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G tels que s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Il s'agit de $F = \text{Ker}(Id_E - s)$ et de $G = \text{Ker}(Id_E + s)$.

5 Sous-espaces propres

Notation. On fixe un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $u \in L(E)$.

Définition. $\lambda \in \mathbb{K}$ est une ***valeur propre*** de u si et seulement s'il existe un vecteur x *non nul* de E tel que $u(x) = \lambda x$. Dans ce cas, tout vecteur y *non nul* tel que $u(y) = \lambda y$ est appelé un ***vecteur propre*** de u associé à la valeur propre λ.
De plus, toujours lorsque λ est une valeur propre de u, $Ker(\lambda Id_E - u)$ est appelé le ***sous-espace propre*** de u associé à la valeur propre λ. Il est noté E_λ, ou E_λ^u en cas d'ambiguïté.

Remarque. Si λ est une valeur propre de u, l'ensemble des vecteurs propres de u pour la valeur propre λ est $E_\lambda \setminus \{0\}$.

Remarque. Même lorsque λ n'est pas une valeur propre de u, on note parfois
$E_\lambda = Ker(\lambda Id_E - u)$, mais dans ce cas, $E_\lambda = \{0\}$.

Définition. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: Les ***éléments propres*** de M (c'est-à-dire les valeurs propres, les vecteurs propres et les sous-espaces propres) sont les éléments propres de l'endomorphisme canoniquement associé à M.

Propriété.
$\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u si et seulement si $\lambda Id_E - u$ n'est pas injective.
En particulier, u est injectif si et seulement si 0 n'est pas une valeur propre de u.

Définition. On appelle ***spectre*** de u l'ensemble des valeurs propres de u. Il est noté $Sp(u)$.

Théorème.
La somme d'un nombre fini de sous-espaces propres de u est toujours directe.

Il faut savoir le démontrer.

Corollaire. Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille de vecteurs propres de u associés à des valeurs propres deux à deux distinctes, alors cette famille est libre.

Exemple. Supposons que $E \neq \{0\}$.
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires non nuls dans E.

- Si u est une homothétie de rapport λ, où $\lambda \in \mathbb{K}$, $Sp(u) = \{\lambda\}$ et $E_\lambda = E$.
- Si u est le projecteur sur F parallèlement à G, $Sp(u) = \{0, 1\}$, $E_1 = F$ et $E_0 = G$.
- Si u est la symétrie par rapport à F parallèlement à G, $Sp(u) = \{1, -1\}$, $E_1 = F$ et $E_{-1} = G$.

Propriété.
Si $v \in L(E)$ commute avec u, les sous-espaces propres de u sont stables par v.
Il faut savoir le démontrer.

6 Changement de base

Notation. On fixe un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie égale à $n \in \mathbb{N}^*$.

Propriété. Soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $f = (f_j)_{1\le j\le n} \in E^n$ une famille de n vecteurs de E. Pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, on pose $p_{i,j} = e_i^*(f_j)$: c'est la $i^{\text{ème}}$ coordonnée dans la base e du $j^{\text{ème}}$ vecteur de la famille f. Alors f est une base si et seulement si la matrice $P = (p_{i,j})$ est inversible. Dans ce cas, P est noté P_e^f (ou bien $P_{e\to f}$) et on dit que $P_e^f = (p_{i,j})$ est la ***matrice de passage*** de la base e vers la base f.

Interprétation tabulaire : Avec les notations précédentes,

$$P_e^f = \begin{array}{cc} \begin{matrix} f_1 & \cdots & f_n \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} \end{array}.$$

Remarque. Si $f = (f_j)_{1\le j\le p}$ est une famille de p vecteurs de E, on pose
$\mathrm{mat}_e^f \overset{\Delta}{=} (e_i^*(f_j))_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $\mathrm{rg}(\mathrm{mat}_e^f) = \mathrm{rg}(f)$.

Propriété. Soit e une base de E :
Pour toute matrice P inversible d'ordre n, il existe une unique base f de E telle que $P = P_e^f$.

Propriété. Soit e et e' deux bases de E. Alors $P_e^{e'} = \mathrm{mat}(Id_E, e', e) = \mathrm{mat}(Id_E)_e^{e'}$.
Il faut savoir le démontrer.

Formule de changement de base pour les vecteurs :
Soit e et e' deux bases de E. Soit $x \in E$. On pose $X \overset{\Delta}{=} \mathrm{mat}(x)_e$ le vecteur colonne des coordonnées de x dans la base e. De même on pose $X' = \mathrm{mat}(x)_{e'}$.
Alors, $\boxed{X = P_e^{e'} X'}$, ou encore $\mathrm{mat}(x)_e = P_e^{e'} \mathrm{mat}(x)_{e'}$.
Il faut savoir le démontrer.

Formule. Si e, e' et e'' sont trois bases de E, $\boxed{P_e^{e"} = P_e^{e'} P_{e'}^{e"} \text{ et } \left(P_e^{e'}\right)^{-1} = P_{e'}^{e}.}$

Formule de changement de bases pour les applications linéaires :
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.
On suppose que e et e' sont deux bases de E et que f et f' sont deux bases de F.
Soit $u \in L(E, F)$. Notons $M = \mathrm{mat}(u)_f^e$, $M' = \mathrm{mat}(u)_{f'}^{e'}$, $P = P_e^{e'}$ et $Q = Q_f^{f'}$.
Alors, $\boxed{M' = Q^{-1} M P}$ c'est-à-dire $\boxed{\mathrm{mat}(u)_{f'}^{e'} = P_{f'}^{f} \times \mathrm{mat}(u)_f^e \times P_e^{e'}}$.

Il faut savoir le démontrer.

Formule de changement de bases pour les endomorphismes :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in L(E)$. On suppose que e et e' sont deux bases de E. Notons $M = \text{mat}(u, e)$, $M' = \text{mat}(u, e')$ et $P = P_e^{e'}$. Alors, $\boxed{M' = P^{-1}MP}$.

7 Diagonalisation et trigonalisation

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in L(E)$.
On dit que u est ***diagonalisable*** si et seulement si il vérifie l'une des propriétés suivantes :

i) Il existe une base e de E telle que $\text{mat}(u, e)$ est diagonale.
ii) Il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u.
iii) $E = \bigoplus\limits_{\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(u)} E_\lambda^u$.
iv) $n = \sum\limits_{\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(u)} \dim(E_\lambda^u)$.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. les homothéties, les projecteurs et les symétries sont diagonalisables.

Définition. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que M est diagonalisable si et seulement si son endomorphisme canoniquement associé est diagonalisable.

Propriété. $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale.
Il faut savoir le démontrer.

Définition. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable. "diagonaliser" M, c'est déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $M = PDP^{-1}$.

Définition. Un endomorphisme u est ***trigonalisable*** si et seulement s'il existe une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

Définition. $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si et seulement si l'endomorphisme canoniquement associé à M est trigonalisable, c'est-à-dire si et seulement si il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}MP$ est triangulaire supérieure.

Définition. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. "***Trigonaliser***" M, c'est déterminer si M est trigonalisable, et dans ce cas, c'est calculer $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et T triangulaire supérieure telles que $M = PTP^{-1}$.

8 Trace d'un endomorphisme

Définition.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. La quantité $\text{Tr}(\text{mat}(u, e))$ ne dépend pas du choix de la base e de E. On la note $\text{Tr}(u)$. C'est la trace de l'endomorphisme u.

Propriété. Si $u, v \in L(E)$, alors $\text{Tr}(uv) = \text{Tr}(vu)$.

Propriété. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Si p est un projecteur de E, alors $\text{Tr}(p) = \text{rg}(p)$.
Il faut savoir le démontrer.