Résumé de cours :
Semaine 32, du 5 juin au 9 juin.

Espaces euclidiens (suite et fin)

1 Orthogonalité (suite)

Notation. E est un espace préhilbertien. Son produit scalaire est noté $< .,. >$.

1.1 Orthogonalité en dimension quelconque (suite)

Remarque. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels, $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$,
mais en général, $(F \cap G)^\perp \neq F^\perp + G^\perp$ et $F^{\perp\perp} \neq F$.

Propriété. $\{0\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0\}$.

Définition. $(x_i)_{i\in I} \in E^I$ est orthogonale si et seulement si : $\forall (i,j) \in I^2,\ (i \neq j \Longrightarrow x_i \perp x_j)$.
Elle est orthonormale si et seulement si : $\forall (i,j) \in I^2,\ < x_i, x_j >= \delta_{i,j}$.

Relation de Pythagore : Si $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille orthogonale de vecteurs de E,
$\| \sum_{i=1}^{n} x_i \|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$. Lorsque $n \geq 3$, la réciproque est fausse.

Propriété. Une famille orthogonale sans vecteur nul est libre.
En particulier, une famille orthonormale est toujours libre.

Propriété. Supposons que E admet une base orthonormée notée $(e_i)_{i\in I}$.
Si $x = \sum_{i\in I} \alpha_i e_i \in E$ et $y = \sum_{i\in I} \beta_i e_i \in E$, alors
$< x, y >= \sum_{i\in I} \alpha_i \beta_i$, $\|x\|^2 = \sum_{i\in I} \alpha_i^2$ et $x = \sum_{i\in I} < e_i, x > e_i$.

Propriété. Supposons que E est muni d'une base $e = (e_i)_{i\in I}$.
Alors il existe un unique produit scalaire sur E pour lequel e est une base orthonormée.

Propriété. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(E_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de n sous-espaces vectoriels de E deux à deux orthogonaux. Alors ils forment une somme directe que l'on note $E_1 \overset{\perp}{\bigoplus} \cdots \overset{\perp}{\bigoplus} E_n = \overset{\perp}{\bigoplus_{1\leq i\leq n}} E_i$.

Définition. Soients F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
G est un ***supplémentaire orthogonal*** de F si et seulement si $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$.

Propriété. Soit F un sous-espace vectoriel de E. F admet au plus un supplémentaire orthogonal.
Il s'agit de $F^\perp$. Il est cependant possible que $F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp \neq E$.

Il faut savoir le démontrer.

1.2 En dimension finie

Propriété. Si E est de dimension finie, l'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & L(E,\mathbb{R}) \\ x & \longmapsto & < x, . > \end{array}$ est un isomorphisme.

Théorème. On ne suppose pas que E est de dimension finie. Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, alors $F^\perp$ est l'unique supplémentaire orthogonal de F. De plus $F = (F^\perp)^\perp$.
Il faut savoir le démontrer.

Définition. Un espace euclidien est un espace préhilbertien de dimension finie.

Hypothèse : jusqu'à la fin du paragraphe, E est supposé euclidien de dimension $n > 0$.

Propriété. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Propriété. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $dim(F^\perp) = dimE - dimF$.

Propriété. Soit e une base orthonormée de E. Soient $x, y \in E$ dont les coordonnées dans la base e sont données sous forme de vecteurs colonnes notés X et Y. Alors $< x, y >= {}^tYX = {}^tXY$.

Remarque. Si e est une base orthonormée de E, pour tout $u \in L(E)$, pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$, $[\text{mat}(u, e)]_{i,j} = \langle e_i, u(e_j)\rangle$.

La fin de ce paragraphe est hors programme.

Définition. La matrice du produit scalaire dans la base e est égale à

$$\text{mat}(< ., . >, e) = (< e_i, e_j >)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Propriété. e est orthogonale si et seulement si $\text{mat}(< ., . >, e)$ est diagonale.
e est orthonormée si et seulement si $\text{mat}(< ., . >, e) = I_n$.

Formule. Soit e une base quelconque de E. On note Ω la matrice de $< ., . >$ dans la base e. Soient x et y deux vecteurs de E, dont les coordonnées dans e sont données sous la forme des vecteurs colonnes X et Y de $\mathbb{R}^n$. Alors

$$< x, y >= {}^tX\Omega Y = {}^tY\Omega X = \sum_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}} x_i y_j \omega_{i,j}.$$

Il faut savoir le démontrer.

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une base $e = (e_1, \dots, e_n)$ et soit φ une forme bilinéaire sur E.
La matrice de φ dans la base e est $\text{mat}(\varphi, e) = (\varphi(e_i, e_j))_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour tout $x, y \in E$, en posant $X = \text{mat}_e(x)$ et $Y = \text{mat}_e(y)$, $\varphi(x, y) = {}^tX\Omega Y$.
φ est symétrique si et seulement si $\Omega \in S_n(\mathbb{K})$.

2 Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel

Définition. Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $F \bigoplus F^\perp = E$. La ***projection orthogonale*** sur F est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$. Dans ce chapitre, elle est notée p_F.

Remarque. Pour tout $x \in E$, $x - p_F(x) = p_{F^\perp}(x) \in F^\perp$.

Formule. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, muni d'une base orthonormée $e = (e_1, \dots, e_n)$. Alors, pour tout $x \in E$, $\boxed{p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} < e_i, x > e_i}$.

Il faut savoir le démontrer.

Théorème de la projection orthogonale :
Soient $a \in E$ et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Alors, $\boxed{d(a, F) = d(a, p_F(a)).}$
Pour tout $y \in F \setminus \{p_F(a)\}$, $d(a, y) > d(a, F)$. $\|a\|^2 = \|p_F(a)\|^2 + d(a, F)^2$.

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base **orthonormée** de F, $\|a\|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} < e_i, a >^2$: inégalité de Bessel.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit $a \in E \setminus \{0\}$. On pose $H = a^\perp$. H est un hyperplan dont a est un vecteur **normal**. Pour tout $x \in E$, $p_H(x) = x - \frac{\langle x, a\rangle}{\|a\|^2} a$ et, en notant s_H la symétrie orthogonale par rapport à H, $s_H(x) = x - 2\frac{\langle x, a\rangle}{\|a\|^2} a$.

Propriété. On suppose que E est de dimension finie $n \geq 1$. Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de E, passant par un point A et dirigé par l'hyperplan vectoriel H : Si $\overrightarrow{n}$ est un vecteur non nul de $H^\perp$, on dit que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{H}$. Dans ce cas, pour tout $M \in E$ $d(M, \mathcal{H}) = \frac{| < \overrightarrow{n}, \overrightarrow{AM} > |}{\| \overrightarrow{n} \|}$.

Si $\mathcal{H}$ a pour équation cartésienne $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = c$ dans un repère orthonormé, pour tout $M \in E$, $d(M, \mathcal{H}) = \frac{|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i - c|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2}}$, où $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées de M dans le repère.

Il faut savoir le démontrer.

3 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème. ***Orthonormalisation de Gram-Schmidt.***
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ une famille **libre** de vecteurs de E. Alors il existe une unique famille orthonormale de vecteurs $(e_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ telle que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$,
i) $e_k \in \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_k)$
ii) et $< e_k, x_k > \in \mathbb{R}_+^*$.

De plus, la famille $(e_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ est définie par $e_k = \frac{E_k}{\|E_k\|}$, où $E_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} < e_i, x_k > e_i$.

Il faut savoir le démontrer.

Interprétation matricielle du procédé de Gram-Schmidt.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x = (x_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ une base de E.
Alors il existe une unique base orthonormée $e = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que la matrice de passage de e vers x est triangulaire supérieure, ses coefficients diagonaux étant de plus strictement positifs.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Si E est euclidien, il admet au moins une base orthonormée.
Toute une famille orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormale de E.

Théorème. ***Orthonormalisation de Gram-Schmidt pour une famille infinie***
Soient $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une famille **libre** de vecteurs de E. Alors il existe une unique famille orthonormale de vecteurs $(e_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
i) $e_k \in \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_k)$
ii) et $< e_k, x_k > \in \mathbb{R}_+^*$.

De plus, la famille $(e_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est définie par : $e_k = \dfrac{E_k}{\|E_k\|}$, où $E_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} < e_i, x_k > e_i$.

4 Endomorphismes d'un espace euclidien E

4.1 Endomorphismes symétriques

Définition. $u \in L(E)$ est symétrique ssi $\forall (x,y) \in E^2$, $< u(x), y >=< x, u(y) >$.

Propriété. Soient e une base **orthonormée** de E et $u \in L(E)$.
Alors u est symétrique si et seulement si $\text{mat}(u,e)$ est symétrique.
Il faut savoir le démontrer.

Notation. $S(E)$ est l'ensemble des endomorphismes symétriques de E.
C'est un sous-espace vectoriel de $L(E)$.

Propriété. Une projection est un endomorphisme symétrique ssi c'est une projection orthogonale.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Une symétrie est un endomorphisme symétrique ssi c'est une symétrie orthogonale.

Propriété. Si $u \in S(E)$ et si F est un sous-espace vectoriel stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u.

Théorème spectral : Si $u \in S(E)$, il existe au moins une base orthonormée de vecteurs propres de u. On dit que u est diagonalisable en base orthonormée.

4.2 Groupe orthogonal.

4.2.1 Caractérisations d'un automorphisme orthogonal.

Définition. Soit $u \in L(E)$. On dit que u est un ***automorphisme orthogonal*** ou une ***isométrie vectorielle*** si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée.
- conservation du produit scalaire : $\forall x, y \in E$, $< u(x), u(y) >=< x, y >$;
- conservation de la norme : $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$.
- si e est une base orthonormée de E, en posant $M = \text{mat}(u,e)$,
  M inversible et $M^{-1} = {}^tM$.

Il faut savoir le démontrer.

Notation. On note $O(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E.

Propriété. $O(E)$ est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$. On l'appelle le ***groupe orthogonal*** de E.

Propriété. Si $u \in O(E)$, $Sp_{\mathbb{R}}(u) \subset \{1, -1\}$.

Propriété. Soit $u \in O(E)$. Si F est un sous-espace vectoriel stable par u, $F^\perp$ est stable par u.

4.2.2 Les rotations.

Propriété. Si $u \in O(E)$, alors $\det(u) \in \{-1, 1\}$, mais la réciproque est fausse.

Définition. Soit $u \in O(E)$. On dit que u est une ***rotation*** si et seulement si $\det(u) = 1$.
u est une ***isométrie vectorielle indirecte*** ou négative si et seulement si $\det(u) = -1$.

Propriété. L'ensemble des rotations de E, noté $SO(E)$, est un sous-groupe de $O(E)$, appelé ***groupe spécial orthogonal***. L'ensemble des isométries indirectes de E est noté $O^-(E) = O(E) \setminus SO(E)$. Il n'a pas de structure particulière.

4.2.3 Les symétries orthogonales

Propriété. La symétrie par rapport à F parallèlement à G (où $F \oplus G = E$) est un automorphisme orthogonal si et seulement si c'est une symétrie orthogonale (ie : $G = F^{\perp}$).

Propriété. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Notons s la symétrie orthogonale par rapport à F. $s \in SO(E)$ si et seulement si $dim(E) - dim(F)$ est paire.
En particulier, si F est un hyperplan, $s \in O^{-}(E)$ et, dans ce cas, s est appelée une ***réflexion***, et si $dim(F) = dim(E) - 2$, s est une rotation, et dans ce cas, s est appelée un ***retournement***.

Définition. On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont perpendiculaires lorsque $F^{\perp}$ et $G^{\perp}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire lorsque $G^{\perp} \subset F$.

4.2.4 Matrices orthogonales.

Propriété. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. C'est une ***matrice orthogonale*** si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée.
- ${}^tMM = I_n$;
- $M^tM = I_n$;
- M est inversible et $M^{-1} =^t M$.

Propriété. L'ensemble des matrices orthogonales est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ appelé le ***groupe orthogonal de degré*** n et noté $O(n)$.

Propriété. Pour tout $M \in O(n)$, $\det(M) \in \{-1, 1\}$.

Définition. Les matrices orthogonales de déterminant égal à 1 sont appelées les ***matrices de rotations***. Les matrices orthogonales de déterminant égal à -1 sont appelées les matrices orthogonales gauches ou indirectes. L'ensemble des matrices de rotations est un sous-groupe de $O(n)$, appelé ***groupe spécial orthogonal de degré*** n et noté $SO(n)$. L'ensemble des matrices orthogonales indirectes est noté $O^{-}(n) = O(n) \setminus SO(n)$. Il n'a pas de structure particulière.

Propriété. $M \in O(n)$ si et seulement si la famille de ses vecteurs colonnes (ou de ses vecteurs lignes) est orthonormale dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soient e une base orthonormée de E et e' une base quelconque de E.
e' est orthonormée si et seulement si la matrice de passage de e à e' est orthogonale.

Propriété. Soient $u \in L(E)$ et e une base orthonormée de E.
Les propriétés suivantes sont équivalentes.
- $u \in O(E)$;
- $\text{mat}(u, e) \in O(n)$;
- $u(e)$ est une base orthonormée.

Propriété. (Hors programme) Dans une matrice orthogonale droite, chaque coefficient est égal à son cofacteur. Dans une matrice orthogonale gauche, chaque coefficient est l'opposé de son cofacteur.

Propriété. Si $M \in S_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in O(n)$ et D diagonale telles que $M = PDP^{-1} = PD^tP$.

4.2.5 Orientation d'un espace vectoriel réel.

Dans ce paragraphe, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$, pour le moment non muni d'une structure euclidienne.

Notation. $\mathcal{B}$ étant l'ensemble des bases de E, on convient que $\forall (e, e') \in \mathcal{B}^2$, $e\mathcal{R}e' \iff \det(P_e^{e'}) > 0$.

Propriété. $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{B}$.

$\mathcal{B}/\mathcal{R}$ est formé de deux éléments qui sont appelés les ***orientations*** de E.
"Orienter E", c'est choisir l'une de ces deux orientations qui devient l'ensemble des ***bases directes***.

Hypothèse : jusqu'à la fin de ce chapitre, on suppose que E est un espace euclidien orienté de dimension $n > 0$.

Définition. Soit D une droite vectorielle incluse dans E que l'on oriente en choisissant un vecteur unitaire $\overrightarrow{k} \in D$. "Orienter l'hyperplan $D^\perp$ par le vecteur $\vec{k}$ de D", c'est choisir comme orientation de $D^\perp$ l'ensemble des bases $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ de $D^\perp$ telles que $(e_1, \ldots, e_{n-1}, \vec{k})$ est une base directe de E.

Propriété. Soient e et e' deux bases orthonormées de E. On suppose que e est directe.
Alors e' est directe si et seulement si $P_e^{e'} \in SO(n)$.

Propriété. Soient $u \in L(E)$ et e une base orthonormée directe de E.
Les propriétés suivantes sont équivalentes.
- $u \in SO(E)$;
- $\mathrm{mat}(u, e) \in SO(n)$;
- $u(e)$ est une base orthonormée directe.

4.2.6 Produit mixte.

Dans tout ce paragraphe, E désigne un espace euclidien **orienté** de dimension $n > 0$.

Définition. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. Le ***produit mixte*** de $(x_1, \ldots, x_n)$ est $\det_e(x_1, \ldots, x_n)$, où e est une base orthonormée directe quelconque de E. Il est noté $\det(x_1, \ldots, x_n)$ ou encore $[x_1, \ldots, x_n]$.

Remarque.
Si on change l'orientation de l'espace E, le produit mixte est changé en son opposé.

Propriété.
On suppose que $n = 2$. L'aire d'un parallélogramme $ABCD$ vaut $|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})|$.

Propriété. On suppose que $n = 3$. Le volume d'un parallélépipède dont les côtés correspondent aux vecteurs u, v, et w vaut $|\det(u, v, w)|$.

5 Géométrie plane

Notation. E est un plan euclidien orienté dont $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une base orthonormée.
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on notera $u_\alpha = \cos(\alpha)\vec{\imath} + \sin(\alpha)\vec{\jmath}$.

5.1 Le groupe orthogonal de degré 2

Propriété.
$SO(2) = \left\{ R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \ / \ \theta \in \mathbb{R} \right\}$. $O^-(2) = \left\{ S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \ / \ \theta \in \mathbb{R} \right\}$.
Il faut savoir le démontrer.

Formule. Pour tout $(\theta, \alpha) \in \mathbb{R}^2$, $R_\theta \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\alpha) \\ \sin(\theta+\alpha) \end{pmatrix}$ et $S_\theta \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta-\alpha) \\ \sin(\theta-\alpha) \end{pmatrix}$.

Formules : $R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi}$, $R_\theta S_\varphi = S_{\theta+\varphi}$, $S_\theta S_\varphi = R_{\theta-\varphi}$, $S_\theta R_\varphi = S_{\theta-\varphi}$.
Il faut savoir le démontrer.

Formule. Pour tout $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$, $S_\theta^{-1} = S_\theta$ et $S_\alpha^{-1} R_\theta S_\alpha = R_{-\theta}$.

Propriété. L'application $\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, +) & \longrightarrow & (SO(2), \times) \\ \theta & \longmapsto & R_\theta \end{array}$ est un morphisme surjectif de groupes. On en déduit que $(SO(2), \times)$ est un groupe commutatif.

Propriété. L'application $R_\theta \longmapsto e^{i\theta}$ est un isomorphisme entre les groupes $(SO(2), \times)$ et $\mathbb{U}$.

5.2 Les isométries vectorielles du plan

Propriété. Soient $s \in O^-(E)$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $mat(s, e) = S_\theta$. s est la réflexion par rapport à la droite vectorielle $\mathbb{R}u_{\frac{\theta}{2}}$. Ainsi, les éléments de $O^-(E)$ sont les réflexions de E.

Définition. On suppose que E est orienté. Soit $r \in SO(E)$. La matrice R_θ de r dans une base orthonormée directe de E ne dépend pas du choix de cette base. θ est appelé l'angle de la rotation r, déterminé à 2π près. Si on change d'orientation, cette mesure est changée en son opposé.

5.3 Angles

Notation. E désigne un plan euclidien orienté.

Définition. Soient x et y deux vecteurs non nuls de E. L'angle orienté des vecteurs x et y est l'angle de l'unique rotation qui transforme $\dfrac{x}{\|x\|}$ en $\dfrac{y}{\|y\|}$. $\cos\widehat{(x,y)} = \dfrac{< x, y >}{\|x\|\|y\|}$ et $\sin\widehat{(x,y)} = \dfrac{\det(x,y)}{\|x\|\|y\|}$.

Propriété. Les x_i désignant des vecteurs non nuls de E, on a les formules suivantes :
- ◇ Relation de Chasles : $\widehat{(x_1, x_2)} + \widehat{(x_2, x_3)} = \widehat{(x_1, x_3)}$.
- ◇ $\widehat{(x_2, x_1)} = -\widehat{(x_1, x_2)}$.
- ◇ $\widehat{(x_1, x_2)} = 0 \iff \mathbb{R}_+x_1 = \mathbb{R}_+x_2$ et $\widehat{(x_1, x_2)} = \pi \iff \mathbb{R}_+x_1 = \mathbb{R}_-x_2$.
- ◇ Si r est une rotation, $(\widehat{r(x_1), r(x_2)}) = \widehat{(x_1, x_2)}$.
- ◇ Si s est une réflexion, $(\widehat{s(x_1), s(x_2)}) = -\widehat{(x_1, x_2)}$.

Définition. E est un espace préhilbertien quelconque. L'angle non orienté ou écart angulaire des vecteurs $x, y \in E$ est $\widehat{(x,y)} = \arccos\left(\dfrac{< x, y >}{\|x\|\|y\|}\right) \in [0, \pi]$.
- — Lorsque $\widehat{(x,y)} \in]0, \frac{\pi}{2}[$, cet angle est dit aigu ;
- — Lorsque $\widehat{(x,y)} \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, cet angle est dit obtus ;
- — Lorsque $\widehat{(x,y)} = \frac{\pi}{2}$ (i.e lorsque $x \perp y$), on dit que c'est un angle droit ;
- — Lorsque $\widehat{(x,y)} \in \{0, \pi\}$, on dit que c'est un angle plat :

5.4 Les droites affines du plan usuel

On se place dans un plan affine $\mathcal{E}$ euclidien orienté.

Propriété. Les droites affines de $\mathcal{E}$ ont pour équation : $ux + vy + w = 0$, où $(u, v) \neq 0$.
Le vecteur de coordonnées (u, v) est orthogonal à la droite.
Les droites non parallèles à $\vec{\jmath}$ admettent une équation de la forme $y = px + q$, p étant appelé la pente de la droite.

Propriété. La droite passant par le point de coordonnées (x_0, y_0) et orthogonale au vecteur (u, v) a pour équation $u(x - x_0) + v(y - y_0) = 0$.

Propriété. La droite passant par le point de coordonnées (x_0, y_0) et dirigée par le vecteur (u, v) a pour équation $-v(x - x_0) + u(y - y_0) = 0 = \begin{vmatrix} u & x - x_0 \\ v & y - y_0 \end{vmatrix}$.

Propriété. La droite passant par les points (supposés distincts) de coordonnées (x_0, y_0) et (x_1, y_1) a pour équation $\begin{vmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0$.

6 Géométrie dans l'espace

E est un espace euclidien orienté de dimension 3 et $\mathcal{E}$ est un espace affine de direction E. On dit que $\mathcal{E}$ est l'espace usuel. On fixe un repère de $\mathcal{E}$, noté $R = (O, e)$, où e une base orthonormée directe de E, notée $e = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ ou $e = (e_1, e_2, e_3)$ selon les cas.

6.1 Le produit vectoriel (hors programme).

Définition. Si $a, b \in E$, $a \wedge b$ est l'unique vecteur de E tel que $\boxed{\forall x \in E \ \det(a, b, x) = < a \wedge b, x > .}$
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. L'application $(a, b) \longmapsto a \wedge b$ est bilinéaire et antisymétrique.

Propriété. Soit $(a, b) \in E^2$. (a, b) est un système lié si et seulement si $a \wedge b = 0$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit a et b deux vecteurs indépendants entre eux.
Alors $a \wedge b$ est un vecteur orthogonal à a et b tel que $(a, b, a \wedge b)$ est une base directe de l'espace. De plus $\|a \wedge b\| = \|a\|\|b\| \sin \phi$, où ϕ est l'angle non orienté entre a et b.

Formule. *Identité de Lagrange :* Pour tout $(a, b) \in E^2$, $< a, b >^2 + \|a \wedge b\|^2 = \|a\|^2\|b\|^2$.

Propriété. $e_1 \wedge e_2 = e_3 \quad e_2 \wedge e_3 = e_1 \quad e_3 \wedge e_1 = e_2$.

Formule. Si $a = {}_e\left|\begin{matrix}\alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3\end{matrix}\right.$ et $b = {}_e\left|\begin{matrix}\beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3\end{matrix}\right.$ alors $a \wedge b = {}_e\left|\begin{matrix} \begin{vmatrix}\alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_3 & \beta_3\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}\end{matrix}\right.$.

Il faut savoir le démontrer.

6.2 Equation d'un plan

Propriété. Les plans affines de $\mathcal{E}$ ont pour équation : $ux + vy + wz + t = 0$, où $(u, v, w) \neq 0$.
Le vecteur de coordonnées (u, v, w) est orthogonal (on dit aussi normal) au plan.
La direction du plan est le plan vectoriel d'équation $ux + vy + wz = 0$.

Propriété. Deux plans de $\mathcal{E}$ d'équations $ux+vy+wz+t = 0$ et $u'x+v'y+w'z+t' = 0$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs normaux de coordonnées (u, v, w) et (u', v', w') sont colinéaires, donc si et seulement si ${}_e\left|\begin{matrix}u \\ v \\ w\end{matrix}\right. \wedge {}_e\left|\begin{matrix}u' \\ v' \\ w'\end{matrix}\right. = 0$.

Propriété. Le plan passant par le point de coordonnées (x_0, y_0, z_0) et orthogonal au vecteur (u, v, w) a pour équation $u(x - x_0) + v(y - y_0) + w(z - z_0) = 0$.

Propriété. Le plan passant par le point de coordonnées (x_0, y_0, z_0) et dirigé par deux vecteurs indépendants de coordonnées (u, v, w) et (u', v', w') a pour équation cartésienne $\begin{vmatrix} x - x_0 & u & u' \\ y - y_0 & v & v' \\ z - z_0 & w & w' \end{vmatrix} = 0$.

6.3 Système d'équations d'une droite

Propriété. Une droite affine de $\mathcal{E}$ admet un système d'équations de la forme :
$\begin{cases} ux+vy+wz+t &= 0 \\ u'x+v'y+w'z+t' &= 0 \end{cases}$, où $ux+vy+wz+t=0$ et $u'x+v'y+w'z+t'=0$ sont les équations de deux plans affines non parallèles. Cette droite est dirigée par le vecteur $\begin{vmatrix} u \\ v \\ w \end{vmatrix}_e \wedge \begin{vmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{vmatrix}_e$.

6.4 Le groupe orthogonal en dimension 3

Théorème. Réduction des matrices orthogonales :
On suppose ici que E est un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.
Si $u \in O(E)$, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\mathrm{mat}(u,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} I_{k_1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -I_{k_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \tau_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \tau_p \end{pmatrix}$$

où $\tau_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$ avec $\sin\theta_i \neq 0$ et $k_1+k_2+2p=n$.

Notation. Soient ω un vecteur non nul de E et $\theta \in \mathbb{R}$. On désigne par $r(\omega,\theta)$ l'unique rotation de E qui laisse invariant ω et qui induit sur le plan $\omega^\perp$, orienté selon le vecteur ω, la rotation d'angle θ.

Propriété. Soient ω un vecteur non nul de E et $\theta \in \mathbb{R}$. Il existe une base orthonormée directe e de E telle que $\mathrm{mat}(r(\omega,\theta),e) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Plus précisément, on peut choisir $e=(i,j,k)$ où (i,j) est une base orthonormée directe du plan $\omega^\perp$, orienté selon le vecteur ω et où $k = \dfrac{\omega}{\|\omega\|}$.

Théorème. Si $r \in SO(E)$, il existe $\omega \in E \setminus \{0\}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $r = r(\omega,\theta)$.

Remarque. Si $r \in SO(E)$, on obtient ω tel que $r = r(\omega,\theta)$, en étudiant l'équation $r(x)=x$, c'est-à-dire en recherchant les vecteurs propres pour la valeur propre 1. De plus, $\boxed{\mathrm{Tr}(r) = 1+2\cos\theta}$.

Remarque. Soit $u \in O^-(E)$. $\det(-u) = (-1)^3\det(u) = 1$, donc $-u \in SO(E)$.
Ainsi, on peut décrire géométriquement une isométrie indirecte, en déterminant
$\omega \in E \setminus \{0\}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $u = -r(\omega,\theta)$.