Feuille d'exercices 1.
révisions (réels, complexes, récurrence), fonctions, trigonométrie.

Réels

Exercice 1.1 : (niveau 1)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{(x+3)(x-1)} \geq 2x-1$.

Exercice 1.2 : (niveau 2)
Inégalité de Cauchy-Schwarz.

1°) Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $xy \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.

2°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que, pour tout $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2\Big)$.

3°) En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$.

4°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sqrt{n}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$.

5°) Montrer que, pour tout réels x, y, z strictement positifs,
$\displaystyle\sqrt{\frac{x+y}{x+y+z}} + \sqrt{\frac{x+z}{x+y+z}} + \sqrt{\frac{y+z}{x+y+z}} \leq \sqrt{6}$.

Exercice 1.3 : (niveau 3)

1°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \ldots, x_{n+1}$ des réels de l'intervalle $[0,1]$. Montrer qu'il existe $i, j \in \mathbb{N}^*$ tel que $1 \leq i < j \leq n+1$ et $|x_i - x_j| \leq \frac{1}{n}$.

2°) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ avec $x > 0$.
Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $q \geq N$ et $|x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^2}$.

3°) On admettra que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, $|\sqrt{2} - \dfrac{p}{q}| \geq \dfrac{c}{q^2}$.

Récurrence

Exercice 1.4 : (niveau 1)

1°) Déterminer l'unique racine positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$, que l'on notera φ (c'est le nombre d'or).
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^{n+2} = \varphi^{n+1} + \varphi^n$.

2°) On désigne par $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci définie par : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \alpha\varphi^n + \beta\Big(\dfrac{-1}{\varphi}\Big)^n$.

Exercice 1.5 : (niveau 1)
Suites arithmético-géométriques :
On fixe deux réels a et b.
On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.
On souhaite exprimer u_n en fonction de n et de u_0.

1°) Traiter le cas où $a = 1$ et traiter le cas où $b = 0$.
Pour la suite, on suppose que $a \neq 1$.

2°) Montrer qu'il existe un unique réel ℓ tel que $\ell = a\ell + b$.

3°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - \ell$.
Calculer v_n en fonction de n et de v_0. Conclure.

4°) La suite (u_n) est-elle convergente ?

Exercice 1.6 : (niveau 1)

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} > \frac{3n}{2n+1}$.

Exercice 1.7 : (niveau 2)

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} [(2k+1)!] \geq [(n+1)!]^{n+1}$.

Exercice 1.8 : (niveau 2)
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$.

Complexes

Exercice 1.9 : (niveau 1)
Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations $z^4 = i$ et $z^3 = -1$.

Exercice 1.10 : (niveau 1)
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $(1+i)z^2 + (1-i)z + 2(1+i) = 0$.

Exercice 1.11 : (niveau 1)
Déterminer le lieu géométrique des points M dont l'affixe z vérifie $\dfrac{z-1}{z+1} \in i\mathbb{R}$.

Exercice 1.12 : (niveau 1)
Soit a et b deux complexes de module 1 tels que $ab \neq -1$. Montrer que $\dfrac{a+b}{1+ab}$ est réel.

Exercice 1.13 : (niveau 1)
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1°) Si $a + ib = c + id$ alors $a = c$ et $b = d$.

2°) On a $|2+i| = \sqrt{2^2 + i^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$.

3°) L'ensemble des points dont l'affixe est d'argument nul est la droite réelle.

4°) Si z_1^3 et z_2^3 sont conjugués alors z_1 et z_2 sont conjugués.

Exercice 1.14 : (niveau 1)
Déterminer les nombres complexes u et v tels que $|u+iv|^2 = u^2 + v^2$.

Exercice 1.15 : (niveau 1)
Pour $n \geq 1$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

Applications

Exercice 1.16 : (niveau 1)
Déterminer le domaine de définition de la fonction $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$.

Exercice 1.17 : (niveau 1)
Lorsque $a \in \mathbb{R}$, on note f_a l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
pour tout $x > 0$, $f_a(x) = x + a$ et pour tout $x \leq 0$, $f_a(x) = x - a$.
Pour quels a l'application f_a est-elle injective (resp : surjective) ?

Exercice 1.18 : (niveau 1)
Soit f une application de E dans F et g une application de F dans G.
Prouvez les implications suivantes :

1°) Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
Si $g \circ f$ est injective et f surjective alors g est injective.

2°) Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
Si $g \circ f$ est surjective et g injective alors f est surjective.

Exercice 1.19 : (niveau 2)

1°) Lorsque f est une application strictement monotone de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, montrer qu'elle est injective.

2°) Donner un exemple d'application définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, injective mais non strictement monotone.

Exercice 1.20 : (niveau 2)
Déterminer les applications f, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telles que,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) + xf(1-x) = 1 + x.$$

Exercice 1.21 : (niveau 2)
Déterminer les applications f, de $[0,1]$ dans $[0,1]$, telles que, pour tout $x, y \in [0,1]$, $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$.

Exercice 1.22 : (niveau 2)
On note f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x, xy - y^3)$.
f est-elle injective ? Est-elle surjective ?

Exercice 1.23 : (niveau 2)

1°) Donner une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$.

2°) Donner une bijection de $[0,1]$ dans $[0,1]$.

3°) Donner une bijection de $[0,1]$ dans $[0,1[$.
Indications, pour la question 3) : utiliser une suite u strictement décroissante telle que $u_0 = 1$.

Trigonométrie

Exercice 1.24 : (niveau 1)
En passant par les complexes, montrer que $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$.

Exercice 1.25 : (niveau 1)
Résoudre l'équation $3\cos(5x) = \cos(2x) + \cos(12x)$.

Exercice 1.26 : (niveau 2)
En exprimant $\cos(3\theta)$ et $\cos(4\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$, montrer que $\cos(\frac{2\pi}{7})$ n'est pas rationnel.

Exercice 1.27 : (niveau 2)
Résoudre l'inéquation $2\sin x - 1 < \sqrt{1 - 4\cos^2 x}$.

Exercice 1.28 : (niveau 3)
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$.

Exercice 1.29 : (niveau 3)

1°) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\cos((n+1)x) = 2\cos(nx)\cos(x) - \cos((n-1)x).$$

2°) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme T_n tel que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $2\cos(n\theta) = T_n(2\cos\theta)$.

3°) Soit P un polynôme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme $x \longmapsto x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, où $k \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{Z}$.
Soit a une racine rationnelle de P. En écrivant a sous la forme $a = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, et p et q premiers entre eux, montrer que $a \in \mathbb{Z}$.

4°) En déduire le théorème de Niven : Soit $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}$.
Montrer que si $\cos\theta \in \mathbb{Q}$, alors $\cos\theta \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

Exercices supplémentaires

Réels

Exercice 1.30 : (niveau 2)
Soient a, b, c trois nombres réels positifs ou nuls. Démontrer que l'un au moins des trois nombres réels $4b(1-c), 4c(1-a)$ et $4a(1-b)$ est inférieur ou égal à 1.

Récurrence

Exercice 1.31 : (niveau 1)
On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2$.
Calculer u_n en fonction de u_0 et n.

Exercice 1.32 : (niveau 1)
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.

Exercice 1.33 : (niveau 1)
Soit (u_n) une suite d'entiers naturels ne prenant jamais deux fois la même valeur et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq n$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$.

Exercice 1.34 : (niveau 1)
Montrer que tout entier supérieur à 2 est un produit de nombres premiers.

Exercice 1.35 : (niveau 2)
On considère la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1°) Exprimer $\Delta_n = F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2$ en fonction de n.

2°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux.

Exercice 1.36 : (niveau 2)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n$ n réels strictement positifs.
On suppose qu'il existe $\varepsilon \in]0, 1[$ tel que, pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $x_i x_j \leq \varepsilon^{|i-j|}$.
Montrer que $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \frac{1 - \sqrt{\varepsilon}^n}{1 - \sqrt{\varepsilon}}$.

Complexes

Exercice 1.37 : (niveau 1)
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $(1+i)z^2 + iz + (1-i) = 0$.

Exercice 1.38 : (niveau 1)
Résoudre l'équation dans $\mathbb{C}$ suivante : $\overline{z} = 2z + j$, où $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$.

Exercice 1.39 : (niveau 1)
Déterminer le lieu géométrique des points M dont l'affixe z vérifie $\frac{z+4i}{5z-3} \in \mathbb{R}$.

Exercice 1.40 : (niveau 1)
Montrer que, pour tout z et z' dans $\mathbb{C}$,
$|z\overline{z'}+1|^2+|z-z'|^2=(1+|z|^2)(1+|z'|^2)$.
Donner une formule analogue pour $|z\overline{z'}-1|^2-|z-z'|^2$.

Exercice 1.41 : (niveau 2)
Pour $z \neq -i$, on pose $Z=\dfrac{z^2}{z+i}$.

1°) Déterminer l'ensemble A des points z pour lesquels Z est imaginaire pur.

2°) Résoudre, pour a réel fixé, $z^2+2iaz-2a=0$.
Montrer que l'ensemble des solutions est inclus dans A.

Applications

Exercice 1.42 : (niveau 1)
Soit $c \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+cx^2}}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $\underbrace{f\circ\cdots\circ f}_{n\ fois}(x)$.

Exercice 1.43 : (niveau 1)
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Parmi les assertions suivantes, déterminer celles qui sont vraies. On justifiera les réponses.

1. Si f est croissante et $f(a)<f(b)$ alors $a<b$.
2. Si f est croissante et $f(a)\leq f(b)$ alors $a\leq b$.
3. Si f est strictement croissante et $f(a)\leq f(b)$ alors $a\leq b$.

Exercice 1.44 : (niveau 2)
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x,y\in\mathbb{R}, f(x-f(y))=2-x-y.$$

Exercice 1.45 : (niveau 3)
Soit f et g deux applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On suppose que f est surjective, que g est injective et que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f(n)\geq g(n)$.

1°) Montrer que g est bijective.

2°) Que peut-on dire de f et g ?

Trigonométrie

Exercice 1.46 : (niveau 2)

1°) Résoudre l'équation $\sin(4x) = \sin x$ sur $\mathbb{R}$.

2°) À l'aide d'une antilinéarisation, démontrer que
$(\sin(4x) = \sin x) \wedge (\sin x \neq 0) \Longleftrightarrow 8\cos^3 x - 4\cos x - 1 = 0$.

3°) Déterminer les solutions de l'équation $8X^3 - 4X - 1 = 0$ (on pourra s'aider d'une solution évidente donnée par la question 1) et en déduire la valeur de $\cos(\frac{\pi}{5})$.

Exercice 1.47 : (niveau 3)
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}$.

Exercice 1.48 : (niveau 3)

1°) Exprimer $\tan(a+b)$ en fonction de $\tan a$ et $\tan b$, lorsque toutes ces quantités sont définies.

2°) Exprimer $\tan(a+b+c)$ en fonction de $\tan a$, $\tan b$ et $\tan c$, lorsque toutes ces quantités sont définies.

3°) Conjecturer puis démontrer une généralisation.