DM 1

À rendre lundi 11 septembre.

Partie I : Homographies

Dans cette première partie, a, b, c, d désignent 4 réels fixés et on note h la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par l'égalité $h(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

1°) Pour cette question, on suppose que $a = c = 1$, $b = -2$ et $d = -1$.

— Déterminer le domaine de définition de h.

— Calculer la dérivée de h puis représenter le tableau de variations de h.

— Tracer le graphe de h. On se contentera pour cela de placer les asymptotes, les points du graphe de h d'abscisses 0 et 2 ainsi que leurs tangentes, puis de faire un tracer régulier et propre à main levée.

2°) En discutant selon les valeurs de a, b, c, d, calculer le domaine de définition de h.

3°) Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx,\ \int_0^1 \frac{2x+3}{x+1}\,dx,\ \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx,\ \int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2}\,dx.$$

4°) On suppose que le domaine de définition de h est non vide.
Montrer que h est constante si et seulement si $ad - bc = 0$.

Pour toute la suite de ce problème, ∞ désigne un élément tel que $\infty \notin \mathbb{R}$.
On note $S = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

5°) On suppose que $ad - bc \neq 0$.

— Lorsque $c \neq 0$, on pose $h(\infty) = \frac{a}{c}$ et $h(-\frac{d}{c}) = \infty$.

— Lorsque $c = 0$, on convient que $h(\infty) = \infty$.

Montrer que h est une bijection de S dans S.

Pour toute la suite du problème, une homographie désignera une application h de S dans S telle qu'il existe 4 réels a, b, c, d avec $ad - bc \neq 0$ vérifiant :

- Si $c \neq 0$,
  - pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$, $h(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$
  - $h(-\frac{d}{c}) = \infty$ et $h(\infty) = \frac{a}{c}$;
- Si $c = 0$,
  - pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d} = \dfrac{ax+b}{d}$ et
  - $h(\infty) = \infty$.

6°) Vérifier que la bijection réciproque d'une homographie est encore une homographie.

Partie II : Composées d'homographies

On convient que pour tout $\beta \in \mathbb{R}$,
- $\beta + \infty = \infty + \beta = \infty$ et
- $\frac{\beta}{\infty} = 0$.

On convient également que, pour tout $\beta \in \mathbb{R}^*$,
- $\beta\infty = \infty\beta = \infty$ et
- $\frac{\beta}{0} = \infty$.

Si α est un réel, on note T_α l'application de S dans S définie par $T_\alpha(x) = x + \alpha$, pour tout $x \in S$.
Si β est un réel non nul, on note H_β l'application de S dans S définie par $H_\beta(x) = \beta x$, pour tout $x \in S$.
Enfin, on note I l'application de S dans S définie par $I(x) = \frac{1}{x}$, pour tout $x \in S$.

7°) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}^*$, les applications T_α, H_β et I sont des homographies.

8°) Soit a, b, c, d quatre réels tels que $ad - bc \neq 0$ et $c \neq 0$. On note h l'homographie définie à partir de a, b, c, d selon les formules de la fin de la partie I.
Montrer qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ avec $\beta \neq 0$ tels que,
pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$, $h(x) = \alpha + \dfrac{\beta}{x+\gamma}$.

9°) Montrer que h est une homographie si et seulement si il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ avec $\beta \neq 0$ tels que $h = T_\alpha \circ H_\beta \circ I \circ T_\gamma$ ou bien $h = T_\alpha \circ H_\beta$.

10°) Soit $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ quatre réels tels que $\beta \neq 0$ et $\beta' \neq 0$.
Montrer qu'il existe $\alpha'', \beta'' \in \mathbb{R}$ avec $\beta'' \neq 0$ tels que $T_\alpha \circ H_\beta \circ T_{\alpha'} \circ H_{\beta'} = T_{\alpha''} \circ H_{\beta''}$.

11°) Si $\delta \in \mathbb{R}^*$, montrer que $I \circ T_\delta \circ I = T_{\frac{1}{\delta}} \circ H_{-\frac{1}{\delta^2}} \circ I \circ T_{\frac{1}{\delta}}$.

12°) En déduire que la composée de deux homographies est une homographie.

Partie III : suites récurrentes homographiques avec un unique point fixe

Lorsque h est une homographie, on dit que ℓ est un point fixe de h si et seulement si $\ell \in S$ et $h(\ell) = \ell$.

13°) Pour cette question uniquement, on suppose que h est l'homographie définie par :

— pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, $h(x) = \dfrac{3x-2}{2x-1}$,

— $h(\frac{1}{2}) = \infty$ et $h(\infty) = \frac{3}{2}$.

a) Montrer que 1 est l'unique point fixe de h.

On pose $v_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_{n+1} = h(v_n)$.
On définit ainsi une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de S.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in \mathbb{R}$ et que $v_n > 1$.

c) Montrer que la suite $\left(\dfrac{1}{v_n - 1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer v_n en fonction de n.

On souhaite dans cette partie montrer que cette méthode de calcul de v_n se généralise.
Pour toute la suite de cette partie, on suppose que h est une homographie possédant un unique point fixe ℓ, avec $\ell \in \mathbb{R}$.

14°) Soit f une application de S dans S. Montrer que f est une homographie admettant ∞ comme seul point fixe si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $f = T_\alpha$.

15°) Montrer qu'il existe une homographie g et $c \in \mathbb{R}^*$ tel que, pour tout $x \in S$, $h(g(x)) = g(x + c)$.

16°) Soit $u_0 \in S$. On définit par récurrence la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de S en convenant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = h(u_n)$.
Dans le cas où $\dfrac{1}{c(\ell - u_0)} \in S \setminus \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de n, u_0, ℓ et c.

Partie IV : suites récurrentes homographiques avec deux points fixes

17°) Pour cette question uniquement, on suppose que h est l'homographie définie par :

— pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$, $h(x) = \dfrac{x}{3-2x}$,

— $h(\frac{3}{2}) = \infty$ et $h(\infty) = -\frac{1}{2}$.

a) Calculer les points fixes de h.

On pose $v_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_{n+1} = h(v_n)$.
On définit ainsi une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de S.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \in \mathbb{R}$ et que $v_n < 0$.

c) Montrer que la suite $\left(\dfrac{v_n}{v_n - 1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer v_n en fonction de n.

On souhaite dans cette partie montrer que cette méthode de calcul de v_n se généralise. Pour toute la suite de cette partie, on suppose que h est une homographie possédant exactement deux points fixes distincts notés ℓ et ℓ', avec $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$.

18°) Soit f une application de S dans S. Montrer que f est une homographie dont l'ensemble des points fixes est $\{0, \infty\}$ si et seulement si il existe $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ tel que $f = H_\beta$.

19°) Soit $u_0 \in \mathbb{R} \setminus \{\ell'\}$. On définit par récurrence la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de S en convenant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = h(u_n)$.
On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}$.
Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_n - \ell}{u_n - \ell'}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bien définie de réels et montrer qu'elle est géométrique.

Partie V : homographies laissant le cercle unité invariant

Dans cette partie, on dit que h est une homographie **complexe** si et seulement si il existe quatre **complexes** a, b, c, d, avec $c \neq 0$ tels que h est l'application de $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par la relation : $h(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$.

On fixe quatre complexes a, b, c, d, avec $c \neq 0$ et on note f l'homographie complexe définie par ces 4 complexes.
On note $\mathbb{U}$ le cercle unité de $\mathbb{C}$: $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1\}$.

20°) À quelle condition, portant sur a, b, c, d, f est-elle définie pour tout $z \in \mathbb{U}$?

Pour toute la suite, on suppose que cette condition est vraie.
On note $f(\mathbb{U}) = \{f(z) \ / \ z \in \mathbb{U}\}$.

21°) Montrer que $f(\mathbb{U})$ est inclus dans $\mathbb{U}$ si et seulement si
$|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$ et $a\overline{b} = c\overline{d}$.

22°) Si $f(\mathbb{U})$ est inclus dans $\mathbb{U}$, montrer que $(|c|, |d|)$ est égal à $(|a|, |b|)$ ou à $(|b|, |a|)$.

23°) Soit h une homographie complexe. Montrer que $h(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$ si et seulement si il existe deux complexes a, b tels que $b \neq 0$ et $|a| \neq |b|$ et s'il existe un réel α tel que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{\overline{a}}{\overline{b}}\}$, $h(z) = e^{i\alpha}\dfrac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}$.