Résumé de cours :
Semaine 1, du 4 au 8 septembre.

1 Fonctions et applications.

Notations : Nous emploierons dans les énoncés ci-dessous l'une des deux notations suivantes :
Notation a) : Soit D et E deux ensembles. Se donner une *application* f de D dans E, signifie que, pour tout $x \in D$, on se donne un unique $f(x) \in E$.
Notation b) : Se donner une *fonction* f d'un ensemble D dans un ensemble E signifie qu'à tout $x \in D$, on associe ou bien aucun élément de E, ou bien un unique élément de E qui est alors noté $f(x)$.

Remarque. Lorsque $D = E = \mathbb{R}$, on parle d'applications ou de fonctions *numériques*.

Définition. Sous la notation b), le domaine de définition de f, noté $\mathcal{D}_f$ est l'ensemble des $x \in D$ pour lesquels la quantité $f(x)$ est *calculable*.

Définition. Soit f une application de D dans E (notation a)).
Pour tout $A \subset D$, on pose $f(A) = \{f(x) \ / \ x \in A\}$.

Notation. Soit f une application de D dans E (notation a)).
Soit D' une partie de D et E' une partie de E.

- On note $f|_{D'}$ l'application de D' dans E qui à x associe $f(x)$. On dit que $f|_{D'}$ est la restriction de f à D'.
- Lorsque $f(D) \subset E'$, on note $f|^{E'}$ l'application de D dans E' qui à x associe $f(x)$. On dit que $f|^{E'}$ est la corestriction de f à E'.
- Lorsque $f(D') \subset E'$, on note $f|_{D'}^{E'}$ l'application de D' dans E' qui à x associe $f(x)$.

Définition.
On se place dans le plan usuel, muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On suppose que f est une application ou une fonction numérique.
La représentation graphique de f, aussi appelée le graphe de f, est l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x, f(x))$, lorsque x décrit $\mathcal{D}_f$ (notation b)), ou bien lorsque x décrit D (notation a)).

Définition. Sous la notation a) ou la notation b),
lorsque $y = f(x)$, avec $x \in D$ et $y \in E$,

- on dit que y est **l'image** de x par f et
- que x est **un antécédent** de y par f.

Définition. Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F (notation a)).

- On dit que f est surjective si et seulement si : $\forall y \in F, \ \exists x \in E, \ y = f(x)$.
  Ainsi, f est surjective si et seulement si tout élément de F possède au moins un antécédent.
- On dit que f est injective si et seulement si : $\forall x, y \in E, \ [f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y]$.
  Ainsi, f est injective si et seulement si, pour tout couple d'éléments distincts de E, leurs images sont différentes. f est injective ssi tout élément de F possède au plus un antécédent.

Définition de la composition :

- Sous la notation a) : soit $f : D \longrightarrow E$ et $g : E \longrightarrow F$ deux applications. Pour tout $x \in D$, on pose $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Ainsi, $g \circ f$ est une application de D dans F, appelée la composée de g et de f.
- Sous la notation b) : soit $f : D \longrightarrow E$ et $g : E \longrightarrow F$ deux fonctions. Lorsque c'est possible, on pose $(g \circ f)(x) = g(f(x))$: ainsi $g \circ f$ est une fonction de D dans F, appelée la composée de g et f.

Propriété d'associativité de la composition : Sous la notation a),
soit $f : D \longrightarrow E$, $g : E \longrightarrow F$ et $h : F \longrightarrow G$ trois applications. Alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
Il faut savoir le démontrer.

Application réciproque :
Soit f une application d'un ensemble D dans un ensemble E (notation a)).

- On dit que f est bijective si et seulement si f est injective et surjective, c'est-à-dire si et seulement si tout élément de E possède un unique antécédent. Ainsi f est bijective si et seulement si pour tout $y \in E$, il existe un unique $x_y \in D$ tel que $y = f(x_y)$.
- Dans ce cas, en notant $x_y = f^{-1}(y)$, on définit une application f^{-1} de E dans D, qui est également bijective. C'est la bijection réciproque de la bijection f.
- Lorsque f est bijective, on a $(f^{-1})^{-1} = f$. De plus $f \circ f^{-1} = Id_E$ et $f^{-1} \circ f = Id_D$, où Id_E est l'application de E dans E qui à x associe x.
- f est bijective si et seulement si il existe une application g de E dans D telle que $f \circ g = Id_E$ et $g \circ f = Id_D$. Dans ce cas, $f^{-1} = g$.

2 Les fonctions numériques

Notation. Dans ce chapitre, sauf précision du contraire, f est une application ou une fonction de D dans $\mathbb{R}$, où D est une partie de $\mathbb{R}$.

2.1 Les fonctions polynomiales

Définition. Un polynôme P (à coefficients réels) est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (notation a)) de la forme $x \longmapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, où $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.
Si $a_n \neq 0$, on dit que n est le degré de ce polynôme. On note $n = \deg(P)$.
Par convention, l'application identiquement nulle est un polynôme de degré égal à $-\infty$.

Définition. Soit P un polynôme et $\alpha \in \mathbb{R}$.
On dit que α est une racine de P si et seulement si $P(\alpha) = 0$.

Propriété. Soit P un polynôme et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors α est une racine de P si et seulement si il existe un polynôme Q tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$.

Propriété. Soit P un polynôme et $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ k réels deux à deux distincts. Alors $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sont des racines de P si et seulement si il existe un polynôme Q tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_k)Q(x)$.

Propriété. Soit P et Q deux polynômes. Alors l'application $x \longmapsto P(x)Q(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est aussi un polynôme, que l'on note PQ. De plus, $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

Théorème. Soit P un polynôme non nul à coefficients réels de degré $n \in \mathbb{N}$. Alors le nombre de racines de P est inférieur ou égal à n.

2.2 Premières caractéristiques d'une fonction

Définition. (Notation b))
- f est paire si et seulement si : $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ [-x \in \mathcal{D}_f] \wedge [f(x) = f(-x)]$.
- f est impaire si et seulement si : $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ [-x \in \mathcal{D}_f] \wedge [f(-x) = -f(x)]$.
- Soit $T > 0$. f est T-périodique si et seulement si $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ [x + T \in \mathcal{D}_f] \wedge f(x+T) = f(x)$.

Propriété.
- Une fonction est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnés.
- Une fonction est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine.
- Une fonction est T-périodique si et seulement si son graphe contient son image par la translation de vecteur $T\overrightarrow{i}$.

Il faut savoir le démontrer.

Définition. (notation a))
- f est croissante si et seulement si $\forall x, y \in D,\ [x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)]$.
- f est strictement croissante si et seulement si $\forall x, y \in D,\ [x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)]$.
- f est décroissante si et seulement si $\forall x, y \in D,\ [x \leq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)]$.
- f est strictement décroissante si et seulement si $\forall x, y \in D,\ [x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)]$.
- f est monotone si et seulement si f est croissante ou décroissante.
- f est strictement monotone si et seulement si f est strictement croissante ou strictement décroissante.

Propriété. Graphiquement, les antécédents de λ par f sont les abscisses des points d'intersection du graphe de f avec la droite horizontale d'équation $y = \lambda$.

Propriété. Graphiquement, les solutions de l'inéquation $f(x) \geq \lambda$, en l'inconnue x, sont les abscisses des points du graphe de f situés au-dessus de la droite horizontale d'équation $y = \lambda$.

Définition. Une application $f : D \longrightarrow E$ est majorée si et seulement si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in D$, $f(x) \leq M$, c'est-à-dire si et seulement si le graphe de f est situé sous la droite horizontale d'équation $y = M$.

2.3 Opérations sur les fonctions

Définition. (notation b)) Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $f + g$ est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$. On a $\mathcal{D}_{f+g} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$.
- λf est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$. On a $\mathcal{D}_{\lambda f} = \mathcal{D}_f$.
- fg est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(fg)(x) = f(x) \times g(x)$. On a $\mathcal{D}_{fg} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$.
- $|f|$ est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $|f|(x) = [f(x)|$. On a $\mathcal{D}_{|f|} = \mathcal{D}_f$.
- On définit de même $f - g$, $\frac{1}{f}$, $\frac{f}{g}$.

Définition. f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

Propriété. Si f est une bijection d'une partie E de $\mathbb{R}$ vers une partie F de $\mathbb{R}$, alors le graphe de f^{-1} est le symétrique du graphe de f pour la symétrie orthogonale selon la première diagonale, c'est-à-dire la droite d'équation $y = x$.

Il faut savoir le démontrer.

Définition. Soit f et g deux applications définies sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On dit que f est inférieure à g sur D, et on note $f \leq g$, lorsque : $\forall x \in D, \ f(x) \leq g(x)$.

Remarque. La notation "$f < g$" désignera parfois la condition $[\forall x \in D, \ f(x) < g(x)]$,
et d'autres fois la condition $[(f \leq g)$ et $(f \neq g)]$,
c'est-à-dire $[\forall x \in D, \ f(x) \leq g(x)]$ et $[\exists x \in D, \ f(x) < g(x)]$.

3 Trigonométrie

3.1 Les fonctions circulaires

Propriété. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{[e^z]} = e^{[\overline{z}]}$. Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, $e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}$.

Définition. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On admet que le complexe $e^{i\theta}$ est sur le cercle unité et que θ est l'angle $\widehat{M_1 M_0 M_{e^{i\theta}}}$ (en notant M_z le point d'affixe z).
On pose $\cos(\theta) = Re(e^{i\theta})$ et $\sin(\theta) = Im(e^{i\theta})$.
Ainsi $\cos(\theta)$ est l'abscisse du point $M_{e^{i\theta}}$ et $\sin(\theta)$ est son ordonnée.

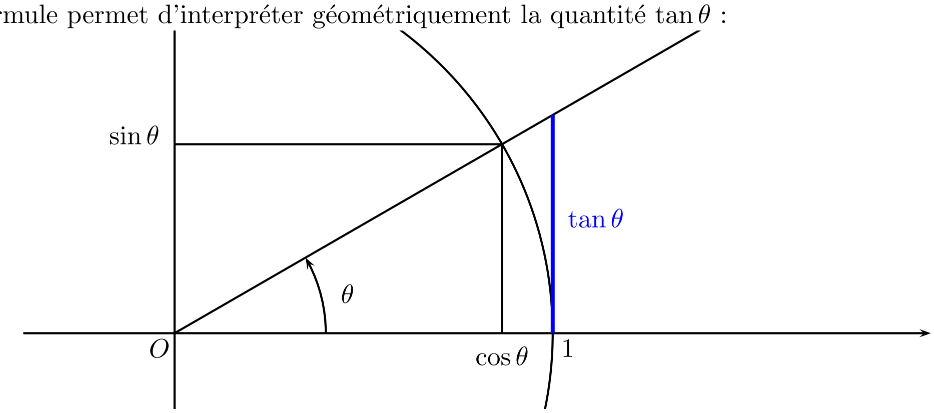
Formules d'Euler : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Propriété. Les fonctions cos et sin sont 2π-périodiques. cos est paire. sin est impaire.

Définition des fonctions tangente et cotangente : $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ et $\text{cotan}\ \theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$.
La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$.

Formules : Soit OAB un triangle rectangle en A. Par définition, l'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit. Notons $\theta = \widehat{AOB}$ l'angle au sommet O.
Alors $\cos\theta = \dfrac{OA}{OB} = \dfrac{\text{longueur du côté adjacent}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$, $\sin\theta = \dfrac{AB}{OB} = \dfrac{\text{longueur du côté opposé}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$
et $\tan\theta = \dfrac{AB}{OA} = \dfrac{\text{longueur du côté opposé}}{\text{longueur du côté adjacent}}$.

Cette dernière formule permet d'interpréter géométriquement la quantité $\tan\theta$:



3.2 Graphes des fonctions circulaires

Il faut savoir tracer les graphes des fonctions cos, sin et tan.

3.3 Formulaire de trigonométrie

Il faut savoir établir chacune de ces formules.

Formule circulaire : Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Formules de symétries : Lorsque les quantités qui interviennent sont définies,

$$\begin{array}{ccc}
\cos(-\theta) = \cos(\theta) & \sin(-\theta) = -\sin(\theta) & \tan(-\theta) = -\tan(\theta) \\
\cos(\pi-\theta) = -\cos(\theta) & \sin(\pi-\theta) = \sin(\theta) & \tan(\pi-\theta) = -\tan(\theta) \\
\cos(\pi+\theta) = -\cos(\theta) & \sin(\pi+\theta) = -\sin(\theta) & \tan(\pi+\theta) = \tan(\theta) \\
\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \sin(\theta) & \sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cos(\theta) & \tan(\frac{\pi}{2}-\theta) = \text{cotan }(\theta) \\
\cos(\frac{\pi}{2}+\theta) = -\sin(\theta) & \sin(\frac{\pi}{2}+\theta) = \cos(\theta) & \tan(\frac{\pi}{2}+\theta) = -\text{cotan }(\theta)
\end{array}$$

Il faut être capable de visualiser toutes ces formules sur le cercle trigonométrique.

Formule d'addition :

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b$ et $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$.
$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a \sin b$ et $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$,
$\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}$ et $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}$.

Formules de duplication : $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$,
$\sin(2a) = 2\sin a\cos a$ et $\tan(2a) = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$.

Premières formules de linéarisation :

$\cos^2 a = \dfrac{\cos(2a)+1}{2}$ et $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos(2a)}{2} \geq 0$.
$2\cos a.\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$,
$2\sin a.\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$,
$2\sin a.\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$.

Formules de factorisation :

$\cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$,

$\cos p - \cos q = -2\sin\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$,

$\sin p + \sin q = 2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$,

$\sin p - \sin q = 2\sin\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2}$.

Il faut savoir les retrouver en utilisant les complexes.

Formules (hors programme) : en posant $u = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, on a
$\cos\theta = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$, $\sin\theta = \dfrac{2u}{1+u^2}$, $\tan\theta = \dfrac{2u}{1-u^2}$.

Propriété. Lignes trigonométriques à connaître :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non défini

La croissance de la fonction tangente sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ aide à retenir la dernière ligne.