Feuille d'exercices 2.
Dérivation et intégration.

Exercice 2.1 : (niveau 1)
Simplifier les expressions $\cos(2\arccos x)$, $\sin(2\arccos x)$ et $\tan(2\arcsin x)$.

Exercice 2.2 : (niveau 1)
Résoudre l'équation $\arcsin x = \arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13}$.

Exercice 2.3 : (niveau 1)
Sans en rechercher les domaines de définition, calculer les dérivées des fonctions suivantes :
$f(x) = \cos\left(e^{3x\sin(\ln x)}\right)$, $g(x) = (\ln^3(x^2+1) - \ln(x^2+1))^5$ et $h(x) = \dfrac{\sin x^2}{(x+\ln x)^9}$.

Exercice 2.4 : (niveau 1)
Calculer les primitives des fonctions suivantes :

$$f(x) = (x^2-1)e^{2x}, \quad g(x) = x^3e^{-x^2}, \quad h(x) = \ln^2 x.$$

Exercice 2.5 : (niveau 1)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\int_1^e t^n \ln t \; dt$.

Exercice 2.6 : (niveau 1)
Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Lorsque g est donnée par l'une des formules suivantes, montrer que g est dérivable et calculer g' :

1°) $g(x) = \displaystyle\int_{2x}^{x^2} f(t) \; dt$.

2°) $g(x) = \displaystyle\int_0^x xf(t) \; dt$.

3°) $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t+x) \; dt$.

Exercice 2.7 : (niveau 1)
Résoudre l'équation $\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right) + \arctan x + \arctan(x\sqrt{3}) = \dfrac{3\pi}{4}$, où $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.8 : (niveau 1)

Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt = \frac{1}{2}$.
Montrer que f possède un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $\ell \in [0,1]$ tel que $f(\ell) = \ell$.

Exercice 2.9 : (niveau 1)

Calculer $A = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x\sqrt{1+\tan^2 x}\ dx$ et $B = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt$.

Exercice 2.10 : (niveau 1)

Calcul de $\displaystyle\int (\cos^4 t)(\sin^3 t)\ dt$.

Exercice 2.11 : (niveau 1)

Calcul de $\int (\cos t)^4 (\sin t)^2 dt$.

Exercice 2.12 : (niveau 2)

Résoudre l'équation $(E)\ :\ 2\text{arcsin}\ x = \text{arcsin}(2x\sqrt{1-x^2})$.

Exercice 2.13 : (niveau 1)

1°) Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer la limite en 1 de la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^\alpha - 1}{x^\beta - 1}$.

2°) Soit $f\ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable. Soit $a \in \mathbb{R}$.
Déterminer la limite en a de $x \longmapsto \dfrac{xf(a) - af(x)}{x-a}$.

Exercice 2.14 : (niveau 2)

Calculer la dérivée n-ième de $f\ :\ x \longmapsto \cos^2 x$ et de $g\ :\ x \longmapsto \dfrac{2x}{x^2-1}$.

Exercice 2.15 : (niveau 2)

Déterminer les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que
$\forall\ x \in \mathbb{R}, \forall\ a \in \mathbb{R}_+^*\ :\ f(x) = \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-a}^{x+a} f(t)dt$.

Exercice 2.16 : (niveau 2)

Calculer $I = \displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{x}{x^2+4x+13}dx$.

Exercice 2.17 : (niveau 2)

Déterminez les applications continues f de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :
$\int_a^b f(t)dt = (b-a)\max\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$.

Exercice 2.18 : (niveau 2)
Calculer les primitives des fonctions suivantes :

$$f(x)=\frac{\sqrt{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}},\quad g(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}},\quad h(x)=\frac{(\ln x)^2}{x},$$
$$i(x)=\frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)},\quad j(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x}},\quad k(x)=\mathrm{th}x,$$
$$\ell(x)=\frac{x^3}{1+x^2},\quad m(x)=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}},\quad n(x)=\tan^2 x,\quad p(x)=(1+\tan x)^2.$$

Exercice 2.19 : (niveau 2)
Etude de la fonction $f(t)=\dfrac{t^2-2t-1}{t}e^{-1/t}$

Exercice 2.20 : (niveau 2)
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n\tan(x)dx$.
Calculer les limites de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2.21 : (niveau 2)
Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx$.

Exercice 2.22 : (niveau 2)
Calculer la limite lorsque x tend vers 0 de $\displaystyle\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}dt$.

Exercice 2.23 : (niveau 2)
On souhaite calculer $I=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{x}{\sin x}dx$.

1°) Transformer I en posant d'abord $u=\frac{x}{2}$, puis $t=\tan u$.

2°) Soit $\alpha>0$. En posant $x=\frac{1}{t}$, calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha}\frac{\ln t}{1+t^2}dt$.

3°) Achever le calcul de I.

Exercice 2.24 : (niveau 2)

1°) Soit $p,q\in\mathbb{R}_+^*$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
Montrer que, pour tout $a,b\in\mathbb{R}_+$, $ab\leq\dfrac{a^p}{p}+\dfrac{a^q}{q}$ (inégalité de Young).

2°) Déterminer les couples $(p,q)\in]1,+\infty[^2$ tels que $\left\{\dfrac{ab}{a^p+b^q}\ /\ a,b\in\mathbb{R}_+^*\right\}$ est borné.

Exercice 2.25 : (niveau 3)
Simplifier $f(x) = \arcsin\Big(\dfrac{1+x}{\sqrt{2(1+x^2)}}\Big)$.

Exercice 2.26 : (niveau 3)
Résoudre l'équation suivante, en l'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\arccos\Big(\frac{1-x}{1+x}\Big) + \arcsin\Big(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\Big) = \pi.$$

Exercice 2.27 : (niveau 3)
Lemme de Gronwall :
Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue, telle qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ pour lequel :
$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ \ f(x) \leq k \displaystyle\int_0^x f(t)dt.$
Montrez que f est nulle.

Exercice 2.28 : (niveau 3)
Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) > 0$ et $f(x)f''(x) \geq f'(x)^2$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ \ f(x) \geq f(0)e^{x\frac{f'(0)}{f(0)}}.$$

Exercice 2.29 : (niveau 3)
Calculer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{i+j}}{i+j}$.

On pourra utiliser que $\displaystyle\int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$.

Exercice 2.30 : (niveau 3)
a et b sont deux réels tels que $a < b$. On note F l'ensemble des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ qui ne s'annulent en aucun point. Pour tout $f \in F$, on pose $P_f = \Big(\displaystyle\int_a^b f(t)dt\Big)\Big(\int_a^b \frac{dt}{f(t)}\Big)$.

1°) Déterminer le minimum de P_f lorsque f décrit F et préciser pour quels éléments de F ce minimum est atteint.

2°) Montrer que $\{P_f / f \in F\}$ n'est pas majoré.

Exercice 2.31 : (niveau 3)
Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
On suppose que, pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $\displaystyle\int_0^1 f(x)x^k \, dx = 0$.
Montrer que f s'annule au moins n fois.

Exercices supplémentaires

Exercice 2.32 : (niveau 1)
Sans en rechercher les domaines de définition, calculer les dérivées des fonctions suivantes :
$f(x) = \dfrac{3x^2}{1-x^2}$, $g(x) = \exp\left(\dfrac{2x-1}{x^2+2}\right)$, $h(x) = xe^{-\frac{1}{x^2}}$.

Exercice 2.33 : (niveau 1)
Sans en rechercher le domaine de définition, dérivez les fonctions suivantes :
$f(x) = \ln\sqrt{|\tan x|}$, $g(x) = \sqrt{\sin\frac{1}{x}}$ et $h(x) = \dfrac{1}{2(e^x+e^{-x})^2}$.

Exercice 2.34 : (niveau 1)
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Une fonction périodique est bornée.
2. Le produit de deux fonctions impaires est une fonction paire.
3. La dérivée d'une fonction impaire est paire.
4. Une primitive d'une fonction paire est impaire.
5. Le produit de deux fonctions croissantes est une fonction croissante.

Exercice 2.35 : (niveau 1)
Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Calculer la limite lorsque x tend vers 0 de $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$.

Exercice 2.36 : (niveau 1)
Résoudre l'équation $\tan(3x - \frac{\pi}{5}) = \tan(x + 4\frac{\pi}{5})$.

Exercice 2.37 : (niveau 1)

1°) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\arccos(\cos x) = x_0$.

2°) Même question avec l'équation $\arccos(\cos x) = x$.

Exercice 2.38 : (niveau 1)
Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2 x}{1+\tan x}dx$.

Exercice 2.39 : (niveau 1)
Résoudre l'équation $3^x + 4^x = 5^x$, où $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.40 : (niveau 1)
Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe une unique primitive F de f telle que $\displaystyle\int_0^1 F(t)\ dt = 0$.

Exercice 2.41 : (niveau 1)
Étudier la fonction $f(x) = \arcsin\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$.

Exercice 2.42 : (niveau 1)

1°) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\mathrm{th}x = \dfrac{2}{\mathrm{th}(2x)} - \dfrac{1}{\mathrm{th}x}$.

2°) En déduire la valeur, pour $n \in \mathbb{N}$, de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \mathrm{th}(2^k x)$.

Exercice 2.43 : (niveau 2)
Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Montrer que $x \longmapsto \cos x + \cos(\alpha x)$ n'est pas périodique.

Exercice 2.44 : (niveau 2)
Calcul de la limite quand x tend vers $\frac{\pi}{6}$ de : $\dfrac{\arctan(2\sin(x)) - \frac{\pi}{4}}{\cos(3x)}$.

Exercice 2.45 : (niveau 2)
Calculer le sinus, le cosinus et la tangente des nombres réels $\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$ et $\frac{7\pi}{12}$.

Exercice 2.46 : (niveau 2)
Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\arctan(t) = \arcsin\Big(\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\Big)$.

Exercice 2.47 : (niveau 2)
Résoudre l'équation $\cos x + \cos 2x - 3\cos 3x = -1$.

Exercice 2.48 : (niveau 2)
Calculer $I = \displaystyle\int_0^2 \sqrt{e^x}dx$, $J = \displaystyle\int_{\frac{\pi^2}{36}}^{\frac{\pi^2}{16}} \frac{dx}{\sqrt{x}\cos^2(\sqrt{x})}$, $K = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\tan x}$ et $L = \displaystyle\int_0^1 e^{e^x+x}dx$.

Exercice 2.49 : (niveau 2)
Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$.

Exercice 2.50 : (niveau 2)
Calculez $\displaystyle\int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}dt$, où $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 2.51 : (niveau 2)
Soit n un entier naturel. Résoudre l'équation en l'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivante :

$$(\cos x)^n + (\sin x)^n = 1.$$

Exercice 2.52 : (niveau 2)
Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On admettra qu'une telle application est toujours bornée.

Montrer que $I_n = \int_0^1 t^n f(t)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (avec $n \in \mathbb{N}$).
Si f est de classe C^1 avec $f(1) \neq 0$,
donner un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2.53 : (niveau 2)
En posant $u = \pi - t$, calculer $I = \int_0^\pi \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}$.

En posant $u = \frac{\pi}{2} - t$, calculer $J = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^x \frac{dt}{1+\tan^{2018} t}\Big)$.

En posant $u = \sqrt{t^2+t+1} - t$, calculer $K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}}$.

Exercice 2.54 : (niveau 2)
(oral CCP) : Simplifier l'expression de la fonction $x \longmapsto \arcsin\Big(\frac{2x}{1+x^2}\Big)$.

Exercice 2.55 : (niveau 2)
On souhaite calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{3+\sin(2x)}}dx$.

1°) Montrer que $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{3+\sin(2x)}}dx$, puis que $I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x-\frac{\pi}{4})}{\sqrt{3+\sin(2x)}}dx$.

2°) Poser successivement $t = x - \frac{\pi}{4}$ et $u = \sin t$ pour calculer I.

Exercice 2.56 : (niveau 2)
1°) Soit $(\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^2$:
a) Résoudre les inéquations $Atan\theta + Atan\varphi < \frac{\pi}{2}$ et $Atan\theta + Atan\varphi > -\frac{\pi}{2}$.
b) Exprimez $Atan\theta + Atan\varphi$ à l'aide de $Atan\frac{\theta+\varphi}{1-\theta\varphi}$.
2°) Calculez $a = Atan2 + Atan5 + Atan8$.
3°) Résoudre $Atan(x-3) + Atanx + Atan(x+3) = \frac{5\pi}{4}$.

Exercice 2.57 : (niveau 2)
Résoudre l'équation $\arctan x + \arctan(x\sqrt{3}) = \frac{7\pi}{12}$.

Exercice 2.58 : (niveau 2)

1°) Exprimer $\tan(a+b+c)$ en fonction de $\tan a$, $\tan b$ et $\tan c$, lorsque toutes ces quantités sont définies.

2°) Calculer $\arctan 2 + \arctan 3 + \arctan(2+\sqrt{3})$.

Exercice 2.59 : (niveau 2)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t) \times \ln^n(\cos t)\ dt$.

Exercice 2.60 : (niveau 2)
Calcul de $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-t^2}}}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

Exercice 2.61 : (niveau 3)
Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $x^y + y^x > 1$.

Exercice 2.62 : (niveau 3)
Résoudre l'équation $\cos(\pi \sin(x)) = \sin(\pi \cos(x))$, en l'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.63 : (niveau 3)
Simplifier $f(x) = \arccos\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}} - \arcsin\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$.

Exercice 2.64 : (niveau 3)
Lorsque $t_1, \ldots, t_{13}$ sont 13 réels, montrer qu'il existe $i, j \in \{1, \ldots, 13\}$ tels que $i \neq j$ et $0 \leq \frac{t_i - t_j}{1 + t_i t_j} \leq 2 - \sqrt{3}$.

Exercice 2.65 : (niveau 3)
On pose $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\cos x \sin x}}dx$ et $J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x \sin x}}dx$.
Montrer que $I = J$ puis calculer I.

Exercice 2.66 : (niveau 3)
Déterminez les applications f continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et vérifiant :
$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3} + \int_0^1 f(x^2)^2 dx$.