Résumé de cours :
Semaine 2, du 11 au 15 septembre.

1 Trigonométrie (suite)

1.1 Equations trigonométriques

1.1.1 Résolution du système (S) : $(\cos x = c) \wedge (\sin x = s)$

1.1.2 Résolution de l'équation $\cos x = c$

Définition. L'application cos réalise une bijection (décroissante) de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$.
On note arccos l'application réciproque.

Propriété. Pour tout $u, v \in \mathbb{R}$, $\cos u = \cos v \Longleftrightarrow u \equiv \pm v\ [2\pi]$.

Il faut savoir résoudre les équations suivantes : $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos x = \cos(\frac{\pi}{3} - 2x)$.

1.1.3 Résolution de l'équation $\sin x = s$

Définition. L'application sin réalise une bijection (croissante) de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dans $[-1, 1]$. On note arcsin l'application réciproque.

Propriété. Pour tout $u, v \in \mathbb{R}$, $\sin u = \sin v \Longleftrightarrow (u \equiv v\ [2\pi]) \vee (u \equiv \pi - v\ [2\pi])$.

1.1.4 Résolution de l'équation $\tan x = t$

Définition. tan est une bijection (croissante) de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$. On note arctan l'application réciproque.

Corollaire. Pour tout $u, v \in \mathbb{R}$, $\tan u = \tan v \Longleftrightarrow u \equiv v\ [\pi]$.

1.1.5 Expressions de la forme $A \cos x + B \sin x$.

Technique à connaître : transformation de $A \cos x + B \sin x$ en $r \cos(x - \varphi)$.
Première méthode :
Soit $(A, B) \in \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$.
$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2}\Big(\dfrac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos x + \dfrac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin x\Big)$.
Posons $c = \dfrac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ et $s = \dfrac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. On a $c^2 + s^2 = 1$, donc on sait qu'il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $c = \cos \varphi$ et $s = \sin \varphi$. Ainsi, en posant $r = \sqrt{A^2 + B^2}$,
$A \cos x + B \sin x = r(\cos \varphi \cos x + \sin \varphi \sin x) = r \cos(x - \varphi)$.
r est appelé l'amplitude et φ la phase.
On remarquera que, par construction, $c + is = e^{i\varphi}$, donc $A + iB = re^{i\varphi}$.
Seconde méthode : lorsque $A \neq 0$. Il existe φ tel que $\tan \varphi = \dfrac{B}{A}$.

Alors $A\cos x + B\sin x = A(\cos x + \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}.\sin x) = \dfrac{A}{\cos\varphi}\cos(x-\varphi)$.

Sachez résoudre les équations suivantes :
$-3\cos x + 4\sin x = 10$ et $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 2$.

2 Dérivation et intégration

2.1 Pente de la tangente

Propriété. Pour une droite d'équation $y = px + y_0$, on dit que p est sa pente.
On dispose également des droites “verticales”, d'équation $x = x_0$, où $x_0 \in \mathbb{R}$, qui sont de pente infinie.
Deux droites affines du plan sont parallèles si et seulement si elles ont la même pente.

Propriété. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Pour tout $x_0, x_1 \in \mathcal{D}_f$, avec $x_0 \neq x_1$, la corde du graphe de f entre les abscisses x_0 et x_1 est par définition l'unique droite du plan passant par les points du graphe de f d'abscisses x_0 et x_1.
Elle a pour équation : $y - f(x_0) = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \times (x - x_0)$.
En particulier, la pente de cette droite est égale à $\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$.

Définition. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.
On dit que f est dérivable en x_0 si et seulement si la quantité $\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ possède une limite lorsque x_1 tend vers x_0. Dans ce cas, cette limite est notée $f'(x_0)$ et est appelée la dérivée de f en x_0.
Informellement, lorsque f est dérivable en x_0, la corde du graphe de f entre les abscisses x_0 et x_1 tend vers la tangente en x_0, d'équation : $y - f(x_0) = f'(x_0).(x - x_0)$.
Cela dit que la meilleure approximation de f, au voisinage de x_0, parmi l'ensemble des applications affines, est $x \longmapsto f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0)$.
Il faut retenir que $f'(x_0)$, lorsqu'elle est définie, est la pente de la tangente au graphe de f en le point d'abscisse x_0.

Définition. On dit que f est dérivable sur l'intervalle I si et seulement si elle est dérivable en chacun des réels de I. On dispose alors de l'application f', définie au moins sur I.
On dit alors que f est de classe D^1.
Lorsque f' est continue sur I, on dit que f est de classe C^1 sur I.

Définition. Si f' est définie sur un intervalle I, on dit que f est deux fois dérivable sur I lorsque f' est dérivable en tout point de I. La dérivée de la dérivée de f est notée f''. On l'appelle la dérivée seconde de f.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Par récurrence, la dérivée n-ième de f lorsqu'elle est définie est la dérivée de la dérivée $(n-1)$-ième. On la note $f^{(n)}$. On dit alors que f est de classe D^n sur I.
On dit que f est de classe C^n sur I lorsque f est n fois dérivable sur I et que $f^{(n)}$ est continue.
On dit que f est de classe C^∞ sur I lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est C^n sur I.

Remarque. On convient que $f^{(0)} = f$, pour toute application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2.2 Règles de dérivation

Règles générales A savoir utiliser dans des calculs sans hésiter

— Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.
— $(fg)' = f'g + fg'$.
— $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2}$.

— $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - g'f}{g^2}$.
— $(f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)$.
— Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $(f^\alpha)' = \alpha f' \times f^{\alpha-1}$.
— Lorsque f est bijective, $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Les fonctions qui interviennent dans ces formules sont toutes supposées dérivables sur un intervalle. On se limite éventuellement à un sous-intervalle pour s'assurer que les quantités qui interviennent dans les formules sont bien définies.

Dérivées des fonctions usuelles A connaître par coeur

— $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$, $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{1}{x^2}$, $\dfrac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
— $\cos' = -\sin$, $\sin' = \cos$.
— $\dfrac{d}{dx}(\tan x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.
— $\arcsin' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\arccos' x = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2}$.
— $\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$, $\dfrac{d}{dx}(a^x) = (\ln a)a^x$ (où $a > 0$), $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Dérivées d'ordre supérieur

— Si f est n fois dérivable, $\dfrac{d^n}{dx^n}(f(ax+b)) = a^n f^{(n)}(ax+b)$.
— $\cos^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$ et $\sin^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$.
— $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(\dfrac{1}{1+x}\right) = \dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$.

2.3 Dérivation et monotonie

Théorème. Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, où I est un **intervalle** de $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable sur I.
— f est constante sur I si et seulement si f' est identiquement nulle sur I.
— f est croissante sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f'(x) \geq 0$.
— f est décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f'(x) \leq 0$.
— Si $f'(x)$ est de signe constant sur I et si $\{x \in I / f'(x) = 0\}$ est fini, alors f est strictement monotone.

Il faut savoir redémontrer les propriétés suivantes. Il faut aussi les connaître pour les utiliser éventuellement sans démonstration.
— pour tout $x > 0$, $\sin x < x$.
— Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$.
— Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $\arctan t + \arctan \frac{1}{t} = \mathrm{sgn}(t) \times \frac{\pi}{2}$.

2.4 Intégration

Définition. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. On note $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ (prononcer "intégrale de a à b de f(t) dt") l'aire comprise entre l'axe des abscisses (noté Ox) et le graphe de f, en comptant positivement les aires au dessus de l'axe Ox (donc lorsque $f(x) \geq 0$) et négativement les aires situées au dessous de l'axe Ox (lorsque $f(x) \leq 0$).

Convention : Avec les notations et hypothèses précédentes, on convient que
$\displaystyle\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$ et que $\displaystyle\int_a^a f(t)dt = 0$.

Propriété. Soit I un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.
Soit f et g deux applications continues de I dans $\mathbb{R}$.
Soit $a, b \in I$ (on peut avoir $a < b$, $b < a$ ou bien $a = b$).

— Linéarité : Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$.

— Relation de Chasles : Pour tout $c \in I$, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Soit $a, b \in I$: **on suppose maintenant que** $a \leq b$.

— Positivité : si $f \geq 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \geq 0$.

— Croissance de l'intégrale : si $f \leq g$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

— Inégalité triangulaire : $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$.

Propriété. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application **continue et positive**, telle que $\int_a^b f(t)dt = 0$. Alors f est identiquement nulle sur $[a, b]$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz : Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et soit f et g deux applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Alors $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)g(t)\ dt\right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2\ dt} \times \sqrt{\int_a^b g(t)^2\ dt}$,
avec égalité si et seulement si f et g sont colinéaires,
c'est-à-dire si et seulement si $f = 0$ ou bien il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in [a, b]$, $g(x) = \lambda f(x)$.
Il faut savoir le démontrer.

2.5 Primitivation

Définition. Soit I un intervalle et f une application continue de I dans $\mathbb{R}$.
On dit que F est une primitive de f sur I si et seulement si F est dérivable et $F' = f$.

Propriété. Avec les hypothèses et notations précédentes, si F_0 est une primitive de f, alors les autres primitives de f sont exactement les applications $F_0 + k$, où k est une fonction constante.

Théorème : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}$ que l'on suppose continue. Soit $x_0 \in I$. Alors $\displaystyle x \longmapsto \int_{x_0}^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en x_0.

Corollaire. Soit f une application continue d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$.
Si F est une primitive de f, alors pour tout $a, b \in I$, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \triangleq [F(t)]_a^b$.

Corollaire. Si f est une application de classe C^1 sur $[a, b]$, $\displaystyle\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$.

Notation. L'écriture "$\int f(t)dt = F(t) + k, t \in I$" signifiera que f est continue sur I et que l'ensemble des primitives de f est $\{F + k / k \in \mathbb{R}\}$.

Il faut savoir calculer les primitives suivantes :
$\displaystyle\int \cos t dt$, $\displaystyle\int x^\alpha dx$ (où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$), $\displaystyle\int \cos^2 x dx$, $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2}$ et $\displaystyle\int \frac{2x dx}{(x^2+1)^2}$.

Propriété. Avec $a \neq 0$, si $\int f(t)dt = F(t) + k$, alors $\int f(at+b)dt = \frac{1}{a}F(at+b) + k$.

Remarque. Si f est une application continue d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$ et si $u : J \longrightarrow I$ et $v : J \longrightarrow I$ sont des applications dérivables sur un intervalle J, on calcule la dérivée de $t \longmapsto \int_{u(t)}^{v(t)} f(x)dx$ en utilisant une primitive F de f :
$\int_{u(t)}^{v(t)} f(x)dx = F(v(t)) - F(u(t))$ a pour dérivée $v'(t)f(v(t)) - u'(t)f(u(t))$.

3 Quelques théorèmes d'analyse

On montrera plus tard les théorèmes suivants :

Théorème de la limite monotone : On pose $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.
Soit $(m, M) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ avec $m < M$. Notons $I =]m, M[$.
Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$ que l'on suppose monotone.
Alors la quantité $f(x)$ possède une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, lorsque x tend vers m (resp : M).

Théorème. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et soit f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
Alors f est bornée et elle atteint ses bornes, c'est-à-dire
qu'il existe $\alpha, \beta \in [a, b]$ tel que, pour tout $x \in [a, b]$, $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$.

Notation. Pour la suite de ce paragraphe, on fixe un intervalle I de cardinal infini.

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI) :
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue à valeurs réelles. Soit $a, b \in I$ avec $a < b$. Alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.

Seconde formulation du TVI :
L'image d'un intervalle par une application continue à valeurs réelles est un intervalle.

Théorème. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

Théorème de la bijection : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue et strictement monotone. Alors f est une bijection de I dans $f(I)$ et $f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$ est également **continue** et strictement monotone (de même sens de variation que f).

Définition. Soit $f : I \longrightarrow J$ où I et J sont deux intervalles. Soit $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. On dit que f est un C^n-difféomorphisme si et seulement si f est une bijection de I sur J et si f et f^{-1} sont toutes deux de classe C^n.

Caractérisation d'un difféomorphisme : Soit f une application définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. f est un C^n-difféomorphisme de I dans $f(I)$ si et seulement si f est de classe C^n et si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \neq 0$.

4 Fonctions Logarithmes et puissances

4.1 Les fonctions ln et exp

La fonction Logarithme népérien : Pour tout $x > 0$, on pose $\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$.
ln est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. $\ln(1) = 0$.
Pour tout $x > 0$, $\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}$.
Il existe un unique $e \in \mathbb{R}$ tel que $\ln(e) = 1$. e est le nombre de Neper : $e = 2,7 \pm 10^{-1}$.
Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$,

— $\ln(xy) = \ln x + \ln y$: A savoir démontrer.
— $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$, $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$,
— $\ln(x^n) = n \ln x$,
— $\ln(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} -\infty$, $\ln(t) \underset{t\to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $\frac{\ln(t)}{t} \underset{t\to +\infty}{\longrightarrow} 0$: A savoir démontrer.

La fonction exponentielle : c'est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien.
exp est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\exp(\ln x) = x$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(\exp(x)) = x$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{d}{dx}(\exp(x)) = \exp(x)$.
Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$,
— $e^{x+y} = e^x e^y$,
— $e^0 = 1$ et $e^1 = e$,
— $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$,
— $e^{nx} = (e^x)^n$.
— $e^t \underset{t\to -\infty}{\longrightarrow} 0$, $e^t \underset{t\to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. $\frac{e^t}{t} \underset{t\to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Représentation graphique de $\ln$ **et** $\exp$: A connaître

Logarithmes et exponentielles en base a**.**
— Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln_a(x) \triangleq \frac{\ln x}{\ln a}$.
Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$,
— $\ln_a(xy) = \ln_a x + \ln_a y$,
— $\ln_a(1) = 0$ et $\ln_a(a) = 1$,
— $\ln_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln_a x$, $\ln_a\left(\frac{x}{y}\right) = \ln_a x - \ln_a y$,
— $\ln_a(x^b) = b \ln_a x$,
— Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $a^x \triangleq e^{x \ln a} = \exp_a(x)$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln_a(a^x) = x$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $a^{\ln_a x} = x$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{d}{dx}(a^x) = (\ln a) a^x$.
Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,
— $a^{x+y} = a^x a^y$,
— $a^0 = 1$ et $a^1 = a$, $a^x > 0$,
— $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$,
— pour tout $b \in \mathbb{R}$, $a^{bx} = (a^x)^b$.
— Pour tout $b > 0$, $a^x b^x = (ab)^x$.