DM 1 : un corrigé

Partie I : Homographies

1°) D'après l'énoncé, $h(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$.

$\diamond$ Soit $x \in \mathbb{R}$. $h(x)$ est défini si et seulement si $x - 1 \neq 0$, donc le domaine de définition de h est $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$\diamond$ h est dérivable sur $\mathcal{D}_h$ et, pour tout $x \in \mathcal{D}_h$, $h'(x) = \dfrac{(x-1)-(x-2)}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

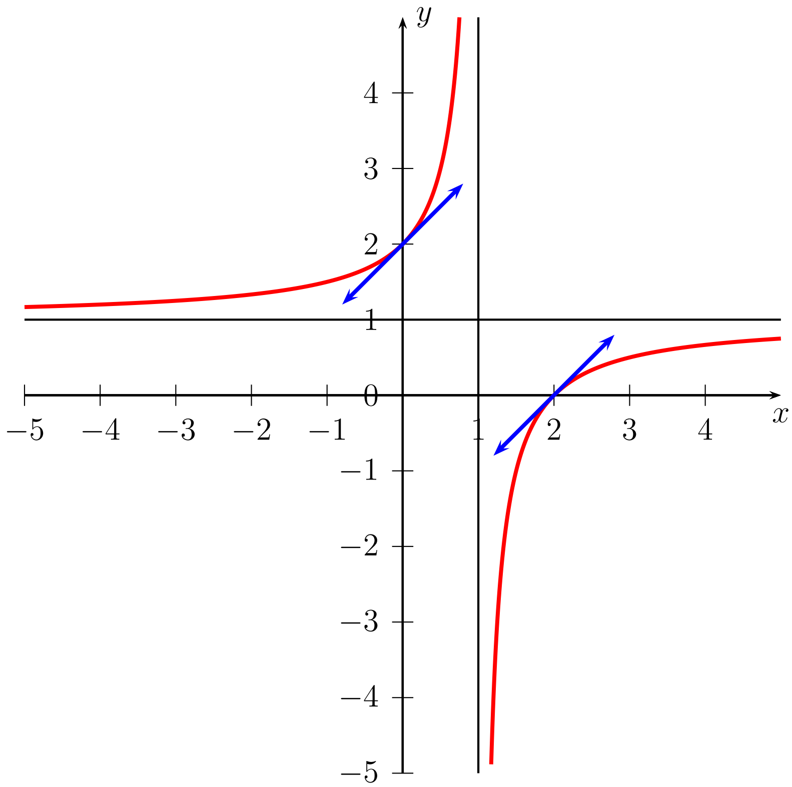
En particulier, pour tout $x \in \mathcal{D}_h$, $h'(x) > 0$, donc h est strictement croissante sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

Lorsque $x \neq 0$, $h(x) = \dfrac{1 - \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} 1$.

Les limites en 1 à droite et à gauche étant simples à calculer, on dispose du tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	$\|$	$+$	
$h(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ $\|$ $-\infty$	$\nearrow$	1

$\diamond$ On calcule $h(0) = 2$, $h'(0) = 1$, $h(2) = 0$, $h'(2) = 1$. On obtient ainsi le graphe suivant



2°) Soit $x \in \mathbb{R}$. $h(x)$ est défini si et seulement si $(C)\ :\ cx + d \neq 0$.
Notons $\mathcal{D}_h$ le domaine de définition de h.
Si $c = d = 0$, alors $\mathcal{D}_h = \emptyset$.
Si $c = 0$ et $d \neq 0$, alors $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}$.
Si $c \neq 0$, alors $(C) \iff x \neq -\frac{d}{c}$, donc $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.

3°) Chacune des intégrales est bien définie en tant qu'intégrale d'une fonction définie et continue sur l'intervalle $[0, 1]$.

— Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x+1}$ est $x \longmapsto \ln(x+1)$,
donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+1}\ dx = [\ln(x+1)]_0^1 = \ln 2$.

— $\dfrac{2x+3}{x+1} = \dfrac{2(x+1)+1}{x+1} = 2 + \dfrac{1}{x+1}$,
donc d'après le calcul précédent, $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+3}{x+1}\ dx = 2 + \ln 2$.

— La dérivée de $x \longmapsto \dfrac{1}{x+1}$ est $x \longmapsto -\dfrac{1}{(x+1)^2}$,
donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\ dx = \left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$.

— $\dfrac{x}{(x+1)^2} = \dfrac{(x+1)-1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{(x+1)^2}$ donc d'après les calculs précédents,
$\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2}\ dx = \ln 2 - \frac{1}{2}$.

4°) Soit $x, y \in \mathcal{D}_h$. En réduisant au même dénominateur, on calcule que
$h(x) - h(y) = \dfrac{(ax+b)(cy+d) - (ay+b)(cx+d)}{(cx+d)(cy+d)} = \dfrac{(ad-bc)(x-y)}{(cx+d)(cy+d)}$.
Par définition, h est constante si et seulement si, pour tout $x, y \in \mathcal{D}_h$, $h(x) = h(y)$, or $\mathcal{D}_h$ est non vide par hypothèse, donc d'après la question 2, c'est $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un réel, donc en particulier, $\mathcal{D}_h$ possède au moins deux réels distincts. On en déduit que h est constante si et seulement si $ad - bc = 0$.

5°) *Premier cas :* On suppose que $c = 0$. Alors $ad - bc = ad \neq 0$, donc $d \neq 0$ et $a \neq 0$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$, avec $\frac{a}{d} \neq 0$. Le graphe de h est donc une droite non horizontale. On sait que dans ce cas, h est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dont la bijection réciproque est $g \ : \ y \longmapsto \frac{d}{a}(y - \frac{b}{d})$.
En posant $h(\infty) = \infty$ et $g(\infty) = \infty$, h et g sont deux applications de S dans S telles que, pour tout $x \in S$, $(h \circ g)(x) = (g \circ h)(x) = x$. D'après le cours, ceci prouve que S est une bijection de S dans S, dont g est la bijection réciproque.
Second cas : On suppose maintenant que $c \neq 0$.
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ et $y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$. Alors
$y = h(x) \iff y(cx+d) = ax+b \iff x(cy-a) = -dy+b \iff x = \dfrac{-dy+b}{cy-a}$, car $cy - a \neq 0$. De plus, $\dfrac{-dy+b}{cy-a} = -\dfrac{d}{c} \iff (-dy+b)c = -d(cy-a) \iff ad - bc = 0$, or $ad - bc \neq 0$, donc $\dfrac{-dy+b}{cy-a} \neq -\dfrac{d}{c}$. Ceci prouve que, pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$, il existe un unique $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ tel que $y = h(x)$, avec $x = \dfrac{-dy+b}{cy-a}$. Ainsi, h est une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$, dont l'application réciproque est $g \ : \ y \longmapsto \dfrac{-dy+b}{cy-a}$.
Alors, en posant $h(-\frac{d}{c}) = \infty$ et $h(\infty) = \frac{a}{c}$, ainsi que $g(\frac{a}{c}) = \infty$ et $g(\infty) = -\frac{d}{c}$, on prolonge h et g en deux applications de S dans S telles que $h \circ g = g \circ h = Id_S$. Ceci prouve que h est une bijection de S dans S, dont g est la bijection réciproque.

6°) Reprenons la question 5. Dans le premier cas, lorsque $c = 0$, on a obtenu que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h^{-1}(x) = \frac{d}{a}(x - \frac{b}{d}) = \dfrac{a'x+b'}{c'x+d'}$, en posant $a' = \frac{d}{a}$, $b' = -\frac{b}{a}$, $c' = 0$ et $d' = 1$. On vérifie que $a'd' - b'c' = a' \neq 0$.
On a également obtenu que $h^{-1}(\infty) = \infty$, or $c' = 0$, donc h^{-1} est une homographie.
Dans le second cas, lorsque $c \neq 0$, on a obtenu que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$,
$h^{-1}(x) = \dfrac{-dx+b}{cx-a} = \dfrac{a'x+b'}{c'x+d'}$, en posant $a' = -d$, $b' = b$, $c' = c$ et $d' = -a$.
On vérifie que $a'd' - b'c' = da - bc \neq 0$.
On a également obtenu que $h^{-1}(\frac{a}{c}) = \infty$ et $h^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}$, donc h^{-1} est encore une homographie.

Partie II : Composées d'homographies

7°) $\diamond$ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Lorsque $x \in \mathbb{R}$, $T_\alpha(x) = x + \alpha = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ en posant $a = 1$, $b = \alpha$, $c = 0$ et $d = 1$. On vérifie que $ad - bc = 1 \neq 0$. De plus $c = 0$ et $T_\alpha(\infty) = \infty + \alpha = \infty$, donc T_α est une homographie.

$\diamond$ Soit $\beta \in \mathbb{R}^*$. Lorsque $x \in \mathbb{R}$, $H_\beta(x) = \beta x = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ en posant $a = \beta$, $b = 0$, $c = 0$ et $d = 1$. On vérifie que $ad - bc = \beta \neq 0$. De plus $c = 0$ et $H_\beta(\infty) = \beta\infty = \infty$, donc H_β est une homographie.

$\diamond$ Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $I(x) = \frac{1}{x} = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ en posant $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ et $d = 0$. On vérifie que $ad - bc = -1 \neq 0$. On est dans le cas où $c \neq 0$. De plus, $-\frac{d}{c} = 0$, $I(0) = \frac{1}{0} = \infty$ et $I(\infty) = \frac{1}{\infty} = 0 = \frac{a}{c}$, donc I est encore une homographie.

8°) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$. Alors
$h(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d} = \dfrac{(cx+d)\frac{a}{c} + b - \frac{ad}{c}}{cx+d} = \dfrac{a}{c} - \dfrac{ad-bc}{c^2}\dfrac{1}{x+\frac{d}{c}}$, donc $h(x) = \alpha + \dfrac{\beta}{x+\gamma}$ en posant $\alpha = \dfrac{a}{c}$, $\beta = -\dfrac{ad-bc}{c^2} \neq 0$ et $\gamma = \dfrac{d}{c}$.

9°) $\diamond$ Soit h une homographie, que l'on suppose définie à partir de 4 réels a, b, c, d tels que $ad - bc \neq 0$, selon les formules de la fin de la partie I.
Supposons d'abord que $c \neq 0$. Alors d'après la question précédente, il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ avec $\beta \neq 0$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$, $h(x) = \alpha + \dfrac{\beta}{x+\gamma} = T_\alpha \circ H_\beta \circ I \circ T_\gamma(x)$.
On sait de plus que $\gamma = \frac{d}{c}$ et $\alpha = \frac{a}{c}$,
donc $T_\alpha \circ H_\beta \circ I \circ T_\gamma(-\frac{d}{c}) = T_\alpha \circ H_\beta \circ I(0) = T_\alpha \circ H_\beta(\infty) = T_\alpha(\infty) = \infty$
et $T_\alpha \circ H_\beta \circ I \circ T_\gamma(\infty) = T_\alpha \circ H_\beta \circ I(\infty) = T_\alpha \circ H_\beta(0) = T_\alpha(0) = \alpha = \frac{a}{c}$. Ainsi, h et $T_\alpha \circ H_\beta \circ I \circ T_\gamma$ ont la même image pour tout élément de S, donc $h = T_\alpha \circ H_\beta \circ I \circ T_\gamma$.
Supposons maintenant que $c = 0$. Alors $a \neq 0$ et $d \neq 0$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{ax+b}{d} = \dfrac{a}{d}x + \dfrac{b}{d} = T_\alpha \circ H_\beta(x)$ en posant $\beta = \frac{a}{d} \neq 0$ et $\alpha = \frac{b}{d}$.
De plus $T_\alpha \circ H_\beta(\infty) = T_\alpha(\infty) = \infty$, donc on a bien $h = T_\alpha \circ H_\beta$.
$\diamond$ Réciproquement, supposons qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\beta \neq 0$ tel que $h = T_\alpha \circ H_\beta$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \beta x + \alpha$ et $h(\infty) = \infty$, donc h est bien une homographie.
Supposons enfin qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ avec $\beta \neq 0$ tels que $h = T_\alpha \circ H_\beta \circ I \circ T_\gamma$.
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\gamma\}$. Alors $h(x) = \alpha + \dfrac{\beta}{x+\gamma} = \dfrac{\alpha x + \alpha\gamma + \beta}{x+\gamma} = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ en posant $a = \alpha$, $b = \alpha\gamma + \beta$, $c = 1 \neq 0$ et $d = \gamma$. On vérifie que $ad - bc = \alpha\gamma - \alpha\gamma - \beta = -\beta \neq 0$. De plus, $h(-\frac{d}{c}) = h(-\gamma) = T_\alpha \circ H_\beta \circ I(0) = \infty$ et $h(\infty) = \alpha = \frac{a}{c}$, donc h est encore une homographie.

10°) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} T_\alpha \circ H_\beta \circ T_{\alpha'} \circ H_{\beta'}(x) &= T_\alpha \circ H_\beta(\beta' x + \alpha') \\ &= \beta(\beta' x + \alpha') + \alpha \\ &= \beta\beta' x + (\beta\alpha' + \alpha) = \beta'' x + \alpha'', \end{aligned}$$

en posant $\beta'' = \beta\beta'$ et $\alpha'' = \beta\alpha' + \alpha$. Ainsi, $T_\alpha \circ H_\beta \circ T_{\alpha'} \circ H_{\beta'}(x) = T_{\alpha''} \circ H_{\beta''}(x)$.
De plus, $T_\alpha \circ H_\beta \circ T_{\alpha'} \circ H_{\beta'}(\infty) = \infty = T_{\alpha''} \circ H_{\beta''}(\infty)$, donc $T_\alpha \circ H_\beta \circ T_{\alpha'} \circ H_{\beta'} = T_{\alpha''} \circ H_{\beta''}$ et $\beta'' = \beta\beta' \neq 0$.

11°) Lorsque $x \in \mathbb{R}^*$ et que $x \neq -\frac{1}{\delta}$, $I \circ T_\delta \circ I(x) = I(\delta + \frac{1}{x}) = \dfrac{1}{\delta + \frac{1}{x}}$, donc

$I \circ T_\delta \circ I(x) = \dfrac{x}{\delta x + 1} = \dfrac{(x\delta + 1)\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta}}{x\delta + 1} = \dfrac{1}{\delta} - \dfrac{1}{\delta^2}\dfrac{1}{x + \frac{1}{\delta}} = T_{\frac{1}{\delta}} \circ H_{-\frac{1}{\delta^2}} \circ I \circ T_{\frac{1}{\delta}}(x)$ (on remarque que $-\dfrac{1}{\delta^2} \neq 0$, donc $H_{-\frac{1}{\delta^2}}$ est bien défini).
Lorsque $x = -\frac{1}{\delta}$, $I \circ T_\delta \circ I(x) = I(0) = \infty$ et $T_{\frac{1}{\delta}} \circ H_{-\frac{1}{\delta^2}} \circ I \circ T_{\frac{1}{\delta}}(x) = T_{\frac{1}{\delta}} \circ H_{-\frac{1}{\delta^2}} \circ I(0) = \infty$.
Lorsque $x = 0$, $I \circ T_\delta \circ I(x) = I \circ T_\delta(\infty) = 0$ et $T_{\frac{1}{\delta}} \circ H_{-\frac{1}{\delta^2}} \circ I \circ T_{\frac{1}{\delta}}(x) = T_{\frac{1}{\delta}} \circ H_{-\frac{1}{\delta^2}}(\delta) = 0$.
Enfin, lorsque $x = \infty$, $I \circ T_\delta \circ I(x) = I \circ T_\delta(0) = \frac{1}{\delta}$
et $T_{\frac{1}{\delta}} \circ H_{-\frac{1}{\delta^2}} \circ I \circ T_{\frac{1}{\delta}}(x) = T_{\frac{1}{\delta}} \circ H_{-\frac{1}{\delta^2}}(0) = \frac{1}{\delta}$.
On a donc montré que, pour tout $x \in S$, $I \circ T_\delta \circ I(x) = T_{\frac{1}{\delta}} \circ H_{-\frac{1}{\delta^2}} \circ I \circ T_{\frac{1}{\delta}}(x)$, ce qui conclut.

12°) Soit g et h deux homographies. D'après la question 9, il existe six réels $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ avec $\beta \neq 0$ et $\beta' \neq 0$ tels que $g = T_\alpha \circ H_\beta \circ I \circ T_\gamma$ ou bien $g = T_\alpha \circ H_\beta$ et tels que $h = T_{\alpha'} \circ H_{\beta'} \circ I \circ T_{\gamma'}$ ou bien $h = T_{\alpha'} \circ H_{\beta'}$. Il y a ainsi 4 cas à examiner.

— *Premier cas :* On suppose que $g = T_\alpha \circ H_\beta$ et que $h = T_{\alpha'} \circ H_{\beta'}$. Alors la question 10 et la réciproque de la question 9 permettent de conclure.

— *Second cas :* On suppose que $g = T_\alpha \circ H_\beta$ et que $h = T_{\alpha'} \circ H_{\beta'} \circ I \circ T_{\gamma'}$.
Alors, par associativité de la composition, $g \circ h = (T_\alpha \circ H_\beta \circ T_{\alpha'} \circ H_{\beta'}) \circ I \circ T_{\gamma'}$,
donc d'après la question 10, il existe $\alpha'', \beta'' \in \mathbb{R}$ avec $\beta'' \neq 0$ tels que
$g \circ h = T_{a''} \circ H_{\beta''} \circ I \circ T_{\gamma'}$, donc d'après la question 9, $g \circ h$ est une homographie.

— *Troisième cas :* On suppose que $g = T_\alpha \circ H_\beta \circ I \circ T_\gamma$ et que $h = T_{\alpha'} \circ H_{\beta'}$.
Alors, $g \circ h = T_\alpha \circ H_\beta \circ I \circ T_\gamma \circ T_{\alpha'} \circ H_{\beta'}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. $T_\gamma \circ T_{\alpha'} \circ H_{\beta'}(x) = \beta' x + \alpha' + \gamma = \beta'(x + \frac{\alpha'+\gamma}{\beta'}) = H_{\beta'} \circ T_\lambda(x)$, où $\lambda = \frac{\alpha'+\gamma}{\beta'}$. De plus $T_\gamma \circ T_{\alpha'} \circ H_{\beta'}(\infty) = \infty = H_{\beta'} \circ T_\lambda(\infty)$,
donc $T_\gamma \circ T_{\alpha'} \circ H_{\beta'} = H_{\beta'} \circ T_\lambda$.
Alors $g \circ h = T_\alpha \circ H_\beta \circ I \circ H_{\beta'} \circ T_\lambda$.
De même, on vérifie que $I \circ H_{\beta'} = H_{\frac{1}{\beta'}} \circ I$, en évaluant ces deux applications lorsque $x \in \mathbb{R}^*$, lorsque $x = 0$ et lorsque $x = \infty$.
Alors $g \circ h = T_\alpha \circ H_\beta \circ H_{\frac{1}{\beta'}} \circ I \circ T_\lambda = T_\alpha \circ H_{\frac{\beta}{\beta'}} \circ I \circ T_\lambda$. C'est une homographie d'après la question 9.

— *Dernier cas :* On suppose que $g = T_\alpha \circ H_\beta \circ I \circ T_\gamma$ et que $h = T_{\alpha'} \circ H_{\beta'} \circ I \circ T_{\gamma'}$.
Alors, en utilisant les relations $T_\gamma \circ T_{\alpha'} = T_\delta$, où $\delta = \gamma + \alpha'$ et $H_{\beta'} \circ I = I \circ H_{\frac{1}{\beta'}}$, on obtient que $g \circ h = T_\alpha \circ H_\beta \circ I \circ T_\delta \circ I \circ H_{\frac{1}{\beta'}} \circ T_{\gamma'}$.
Si $\delta = 0$, alors $T_\delta = Id_S$, donc $I \circ T_\delta \circ I = I \circ I = Id_S$, puis $g \circ h = T_\alpha \circ H_\beta \circ H_{\frac{1}{\beta'}} \circ T_{\gamma'}$.
Ainsi, $g \circ h = T_\alpha \circ H_{\frac{\beta}{\beta'}} \circ T_{\gamma'} \circ H_1$: c'est une homographie d'après la question 10.
Il reste le cas où $\delta \neq 0$. Alors, d'après la question 11,

$g \circ h = T_\alpha \circ H_\beta \circ T_{\frac{1}{\delta}} \circ H_{-\frac{1}{\delta^2}} \circ I \circ T_{\frac{1}{\delta}} \circ H_{\frac{1}{\beta'}} \circ T_{\gamma'} \circ H_1$. D'après la question 10, on peut écrire que $g \circ h = T_u \circ H_v \circ I \circ T_{u'} \circ H_{v'}$, où u, v, u', v' sont quatre réels tels que $v \neq 0$ et $v' \neq 0$.
On vérifie que $T_{u'} \circ H_{v'} = H_{v'} \circ T_{\frac{u'}{v'}}$,
donc $g \circ h = T_u \circ H_v \circ I \circ H_{v'} \circ T_{\frac{u'}{v'}} = T_u \circ H_v \circ H_{\frac{1}{v'}} \circ I \circ T_{\frac{u'}{v'}}$. finalement, $g \circ h = T_u \circ H_{\frac{v}{v'}} \circ I \circ T_{\frac{u'}{v'}}$: c'est bien une homographie d'après la question 9.

Partie III : suites récurrentes homographiques

13°) a) Soit $x \in S$.
Si $x = \infty$ alors $h(x) = \frac{3}{2} \neq \infty$, donc ∞ n'est pas un point fixe de h.
Si $x = \frac{1}{2}$, alors $h(x) = \infty \neq x$, donc $\frac{1}{2}$ n'est pas un point fixe de h.
Supposons maintenant que $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$. Alors
Alors $h(x) = x \iff \dfrac{3x-2}{2x-1} = x \iff 2x^2 - x = 3x - 2 \iff x^2 - 2x + 1 = 0$
donc $h(x) = x \iff (x-1)^2 = 0 \iff x = 1$.
Ceci démontre que h admet un unique point fixe dans S, égal à 1.
b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $R(n)$ l'assertion : $v_n \in \mathbb{R}$ et $v_n > 1$, que l'on va montrer par récurrence.
Lorsque $n = 0$, $v_n = 2 > 1$, d'où $R(0)$.
Supposons que $n \geq 0$ et que $R(n)$ est vraie.
D'après $R(n)$, $v_n \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, donc $v_{n+1} \in \mathbb{R}$
et $v_{n+1} = \dfrac{(2v_n - 1) + (v_n - 1)}{2v_n - 1} = 1 + \dfrac{v_n - 1}{2v_n - 1}$, or d'après $R(n)$, $v_n > 1$, donc $v_n - 1 > 0$ et $2v_n - 1 > 0$. On en déduit que $\dfrac{v_n - 1}{2v_n - 1} > 0$ puis que $v_{n+1} > 1$, ce qui prouve $R(n+1)$.
D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in \mathbb{R}$ et $v_n > 1$.
c) On en déduit que la suite $\left(\dfrac{1}{v_n - 1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bien définie de réels.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On calcule que $\dfrac{1}{v_{n+1} - 1} = \dfrac{1}{\dfrac{3v_n - 2}{2v_n - 1} - 1} = \dfrac{1}{\dfrac{v_n - 1}{2v_n - 1}} = \dfrac{2v_n - 1}{v_n - 1}$,
donc $\dfrac{1}{v_{n+1} - 1} = \dfrac{2v_n - 2 + 1}{v_n - 1} = 2 + \dfrac{1}{v_n - 1}$, donc la suite $\left(\dfrac{1}{v_n - 1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison 2.
d) Par une récurrence simple, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$\dfrac{1}{v_n - 1} = 2n + \dfrac{1}{v_0 - 1} = 2n + 1$, donc $v_n = \dfrac{1}{2n+1} + 1 = \dfrac{2n+2}{2n+1}$.
14°) S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $f = T_\alpha$, alors $f(\infty) = \infty$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + \alpha \neq x$, car $\alpha \neq 0$, donc ∞ est bien l'unique point fixe de f.
Réciproquement, supposons que f est une homographie admettant ∞ comme seul point fixe.

Notons a, b, c, d quatre réels qui définissent f conformément à la fin de la partie I.
Si $c \neq 0$, alors $f(\infty) = \frac{a}{c} \neq \infty$, donc ∞ n'est pas un point fixe de f et a fortiori ce n'est pas l'unique point fixe de f. Ainsi, $c = 0$, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha x + \beta$ et $f(\infty) = \infty$. Si $\alpha \neq 1$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x \Longleftrightarrow (\alpha - 1)x = -\beta$, donc $\dfrac{-\beta}{\alpha - 1}$ est un point fixe de f, différent de ∞, ce qui est faux. Ainsi, $c = 1$. Alors $f(x) = x + \beta$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Si $\beta = 0$, alors tout réel est un point fixe, donc $\beta \neq 0$, ce qu'il fallait démontrer.

15°) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\ell\}$, posons $k(x) = \dfrac{1}{x - \ell}$. En convenant que $k(\ell) = \infty$ et $k(\infty) = 0$, k est une homographie. D'après la question 6, k est donc une bijection de S dans S dont la bijection réciproque est encore une homographie. Posons $g = k^{-1}$.
Posons $f = g^{-1} \circ h \circ g$. D'après la question 12, f est une homographie. De plus, pour tout $x \in S$, $f(x) = x \Longleftrightarrow g^{-1}(h(g(x))) = x \Longleftrightarrow h(g(x)) = g(x)$, or ℓ est l'unique point fixe de h, donc $f(x) = x \Longleftrightarrow g(x) = \ell \Longleftrightarrow x = g^{-1}(\ell) = k(\ell) = \infty$. Ainsi f est une homographie dont ∞ est l'unique point fixe. D'après la question précédente, il existe $c \in \mathbb{R}^*$ tel que $f = T_c$. Alors $h \circ g = g \circ T_c$, donc pour tout $x \in S$, $h(g(x)) = g(x + c)$.

16°) On a vu que $g^{-1} \circ h \circ g = T_c$, donc $g^{-1} \circ h = T_c \circ g^{-1}$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{-1}(u_{n+1}) = g^{-1}(h(u_n)) = T_c(g^{-1}(u_n)) = g^{-1}(u_n) + c$, donc la suite $(g^{-1}(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dans S, de raison $c \in \mathbb{R}^*$.
Or $g^{-1}(u_0) = \infty \Longleftrightarrow u_0 = g(\infty) = \ell$ (car $k(\ell) = \infty$ et $g = k^{-1}$), donc il y a deux cas :

— Si $u_0 = \ell$, alors la suite $(g^{-1}(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à ∞, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = g(\infty) = \ell$. C'est d'ailleurs évident car ℓ est un point fixe de h.

— Supposons maintenant que $u_0 \neq \ell$.
Alors $(g^{-1}(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de réels, de raison $c \in \mathbb{R}^*$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{-1}(u_n) = cn + g^{-1}(u_0) = cn + \dfrac{1}{u_0 - \ell}$,
puis $u_n = g\Big(cn + \dfrac{1}{u_0 - \ell}\Big)$. De plus, d'après la question 6, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) = \dfrac{-\ell x + 1}{x} = -\ell + \dfrac{1}{x}$, $g(0) = \infty$ et $g(\infty) = -\ell$.
$cn + \dfrac{1}{u_0 - \ell} = 0 \Longleftrightarrow cn = \dfrac{1}{\ell - u_0} \Longleftrightarrow n = \dfrac{1}{c(\ell - u_0)}$. D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \neq \dfrac{1}{c(\ell - u_0)}$, donc $u_n = -\ell + \dfrac{u_0 - \ell}{cn(u_0 - \ell) + 1}$.

Partie IV : suites récurrentes homographiques avec deux points fixes

17°) **a)** Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$. $h(x) = x \Longleftrightarrow x = 3x - 2x^2 \Longleftrightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Longleftrightarrow x \in \{0, 1\}$.
De plus $\frac{3}{2}$ et ∞ ne sont pas des points fixes de h, donc h possède exactement deux points fixes dans S, égaux à 0 et 1.

b) On calcule que $v_1 = h(2) = \frac{2}{-1} = -2$, donc $v_1 < 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $v_n \in \mathbb{R}$ et $v_n < 0$. Alors $3 - 2v_n > 0$, donc $v_{n+1} \in \mathbb{R}$ et $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{3 - 2v_n} < 0$. Le principe de récurrence permet de conclure.

c) On en déduit que la suite $\left(\dfrac{v_n}{v_n - 1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels correctement définie. On calcule que $\dfrac{v_{n+1}}{v_{n+1} - 1} = \dfrac{\dfrac{v_n}{3-2v_n}}{\dfrac{v_n}{3-2v_n} - 1} = \dfrac{\dfrac{v_n}{3-2v_n}}{\dfrac{3v_n - 3}{3-2v_n}} = \dfrac{1}{3}\dfrac{v_n}{v_n - 1}$, donc la suite $\left(\dfrac{v_n}{v_n - 1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

d) On en déduit que $\dfrac{v_n}{v_n - 1} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \dfrac{v_0}{v_0 - 1} = \dfrac{2}{3^n}$, donc $3^n v_n = 2v_n - 2$, puis $v_n = \dfrac{2}{2 - 3^n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^n \neq 2$).

18°) Si $f = H_\beta$ où $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, alors on vérifie que l'ensemble des points fixes de f est $\{0, \infty\}$. En effet, $\beta \neq 0$, donc $f(\infty) = \infty$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$f(x) = x \iff x(\beta - 1) = 0 \iff x = 0$, car $\beta \neq 1$.
Réciproquement, supposons que f est une homographie dont l'ensemble des points fixes est $\{0, \infty\}$.
$f(\infty) = \infty$, donc le même raisonnement qu'en question 14 montre qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha x + \beta$. De plus $f(0) = 0$, donc $\beta = 0$. Si $\alpha = 1$, alors tous les réels sont des points fixes de f, ce qui est faux, donc $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, ce qu'il fallait démontrer.

19°) $\diamond$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \ell' \iff h(u_n) = h(\ell')$, car h est bijective, donc $u_n = \ell' \iff u_{n+1} = \ell'$. Ainsi, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = \ell'$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à ℓ'. En particulier, $u_0 = \ell'$, ce qui est faux. Donc $u_n \neq \ell'$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui prouve que la suite $\left(\dfrac{u_n - \ell}{u_n - \ell'}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bien définie de réels.

$\diamond$ Notons k l'homographie définie par : pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{\ell'\}$, $k(x) = \dfrac{x - \ell}{x - \ell'}$, $k(\ell') = \infty$ et $k(\infty) = 1$. Posons $g = k^{-1}$ et $f = g^{-1} \circ h \circ g$.
Pour tout $x \in S$, $f(x) = x \iff h(g(x)) = g(x) \iff g(x) \in \{\ell, \ell'\} \iff x \in \{0, \infty\}$. Ainsi, f est une homographie dont l'ensemble des points fixes est $\{0, \infty\}$. D'après la question précédente, il existe $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ tel que $f = H_\beta$. Ainsi, $g^{-1} \circ h = H_\beta \circ g^{-1}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $k(u_{n+1}) = g^{-1}(h(u_n)) = \beta g^{-1}(u_n) = \beta k(u_n)$, donc la suite $(k(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison β, ce qui conclut.

Partie V : homographies laissant le cercle unité invariant

20°) f est définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$, donc f est définie pour tout $z \in \mathbb{U}$ si et seulement si $-\frac{d}{c} \notin \mathbb{U}$, c'est-à-dire si et seulement si $|d| \neq |c|$.

21°) $f(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U} \iff \forall z \in \mathbb{U},\ |f(z)|^2 = 1 \iff \forall z \in \mathbb{U},\ \dfrac{az + b}{cz + d} \times \dfrac{\overline{az} + \overline{b}}{\overline{cz} + \overline{d}} = 1$, or lorsque $z \in \mathbb{U}$, $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$, donc

$$\begin{aligned} f(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U} \quad &\Longleftrightarrow \forall z \in \mathbb{U},\ \ (cz+d)(\tfrac{\overline{c}}{z} + \overline{d}) = (az+b)(\tfrac{\overline{a}}{z} + \overline{b}) \\ &\Longleftrightarrow \forall z \in \mathbb{U},\ \ (cz+d)(\overline{c} + \overline{d}z) = (az+b)(\overline{a} + \overline{b}z) \\ &\Longleftrightarrow \forall z \in \mathbb{U},\ \ (a\overline{b} - c\overline{d})z^2 + (|a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2)z + b\overline{a} - d\overline{c} = 0, \end{aligned}$$

Si cette dernière condition est vraie, alors le polynôme
$z \longmapsto (a\overline{b} - c\overline{d})z^2 + (|a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2)z + b\overline{a} - d\overline{c}$ possède une infinité de racines, donc d'après le cours, tous ses coefficients sont nuls. La réciproque étant évidente, on a montré que $f(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$ si et seulement si $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$ et $a\overline{b} = c\overline{d}$.

22°) On suppose donc que $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$ et $a\overline{b} = c\overline{d}$. Ainsi, on peut poser $S = |a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$ et $P = |a|^2.|b|^2 = |c|^2.|d|^2$. Alors $\{|a|^2, |b|^2\}$ et $\{|c|^2, |d|^2\}$ sont tous deux égaux à l'ensemble des solutions de l'équation $z^2 - Sz + P = 0$. En effet, $z^2 - Sz + P = (z - |a|^2)(z - |b|^2) = (z - |c|^2)(z - |d|^2)$. On en déduit que $(|c|, |d|)$ est égal à $(|a|, |b|)$ ou à $(|b|, |a|)$.

23°)
$\diamond$ On suppose que $f(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$. On peut donc utiliser les résultats des questions précédentes de cette partie.
Supposons d'abord que $|a| = |c|$ et $|b| = |d|$. Alors il existe $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ tels que $c = ae^{i\theta}$ et $d = be^{i\varphi}$. Dans ce cas, $a\overline{b} = c\overline{d} = e^{i(\theta-\varphi)}a\overline{b}$, donc $\theta \equiv \varphi\ [2\pi]$ (même lorsque $a\overline{b} = 0$, car dans ce cas θ ou φ peut être choisi quelconque).
Alors $f(z) = e^{-i\theta}$, pour tout $z \in \mathbb{U}$, donc $f(\mathbb{U}) = \{e^{-i\theta}\} \neq \mathbb{U}$, ce qui est faux.
Ainsi, d'après la question précédente, $|a| = |d|$ et $|b| = |c|$, donc il existe $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ tels que $d = \overline{a}e^{i\theta}$ et $c = \overline{b}e^{i\varphi}$. Par hypothèse, $c \neq 0$, donc $b \neq 0$, et $|d| \neq |c|$, donc $|a| \neq |b|$.
De plus, $a\overline{b} = c\overline{d} = a\overline{b}e^{i(\varphi-\theta)}$, donc $\theta \equiv \varphi\ [2\pi]$. Ainsi, $f(z) = e^{-i\theta}\dfrac{az+b}{\overline{b}z + \overline{a}}$.
$\diamond$ Réciproquement, supposons que $b \neq 0$, que $|a| \neq |b|$ et qu'il existe un réel α tel que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{\overline{a}}{\overline{b}}\}$, $f(z) = e^{i\alpha}\dfrac{az+b}{\overline{b}z + \overline{a}}$.
Alors f est une homographie complexe associée au quadruplet de complexes (a, b, c, d) défini par : $c = \overline{b}e^{-i\alpha}$ et $d = \overline{a}e^{-i\alpha}$. f est définie sur $\mathbb{U}$ d'après la question 20 et $f(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$ d'après la question 21.
De plus, $ad - bc = e^{-i\alpha}(|a|^2 - |b|^2) \neq 0$, donc le calcul correspondant au second cas de la question 5 reste valable mot pour mot en travaillant dans $\mathbb{C}$. Ceci démontre que f est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ dans $\mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$, dont l'application réciproque est $f^{-1}\ :\ y \longmapsto \dfrac{-dy+b}{cy-a}$.
On vérifie que $c \neq 0$, $|-a| \neq |c|$, que $|-d|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |-a|^2$
et $(-d)\overline{b} = c\overline{(-a)} = -e^{-i\alpha}\overline{a}\overline{b}$, donc d'après la question 21, $f^{-1}(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.
Si $z \in \mathbb{U}$, alors $z = f(f^{-1}(z))$, or $f^{-1}(z) \in \mathbb{U}$, donc $z \in f(\mathbb{U})$. Ceci démontre que $f(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$, ce qui conclut.