

DM 3 : corrigé.

A) Les fonctions puissances

1°) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$. On sait d'après le cours de Terminale que $\ln(x^n) = n \ln x$, donc en passant à l'exponentiel, $x^n = \exp(\ln(x^n)) = \exp(n \ln x) = e^{n \ln x}$.

2°) Notons f l'application $x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$. f est égale à la composée $u \circ v$ en posant $u = \exp$ et $v = (x \mapsto \alpha \ln x)$, donc f est bien dérivable sur \mathbb{R}_+^* en tant que composée d'applications dérivables, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = v'(x)u'(v(x)) = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x} = \alpha e^{-\ln(x)} e^{\alpha \ln x} = \alpha e^{(\alpha-1) \ln x}, \text{ donc } f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

3°) Soit $x \in]1, +\infty[$. $\int_1^x \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x}$, donc $\int_1^x \frac{dt}{t^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$.

4°) $\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t}\right]_x^1 = 2 - 2\sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2$.

5°)

◇ D'après les questions précédentes on a immédiatement l'existence des deux premières intégrales avec $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 1$ et $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2$.

◇ Étudions d'abord le cas où $\alpha = 1$.

Pour tout $x > 1$, $\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, donc $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ n'est pas définie.

De même, pour tout $x < 1$, $\int_x^1 \frac{dt}{t} = -\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$, donc $\int_0^1 \frac{dt}{t}$ n'est pas définie.

◇ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $\alpha \neq 1$.

D'après la question 2, l'application $t \mapsto \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) = t^{-\alpha} = e^{-\alpha \ln t} = \frac{1}{e^{\alpha \ln t}} = \frac{1}{t^\alpha}, \text{ donc } t \mapsto \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \text{ est une primitive de la}$$

fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ sur \mathbb{R}_+^* .

◇ Soit $x > 1$. $\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \right]_1^x = \frac{e^{(-\alpha+1) \ln x} - 1}{1-\alpha}$. Lorsque x tend vers $+\infty$, cette

dernière quantité converge vers un réel si et seulement si $-\alpha + 1 < 0$. Ainsi $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$

est définie si et seulement si $\alpha > 1$ et dans ce cas, $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$.

◇ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $\alpha \neq 1$. Soit $x < 1$. $\int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \right]_x^1 = \frac{1 - e^{(-\alpha+1)\ln x}}{1-\alpha}$. Lorsque x tend vers 0, cette dernière quantité converge vers un réel si et seulement si $-\alpha + 1 > 0$. Ainsi $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ est définie si et seulement si $\alpha < 1$ et dans ce cas, $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$.

B) Une intégrale doublement impropre

6°) $f(x)$ est défini si et seulement si $x > 0$ et $1-x > 0$, donc le domaine de définition de f est $]0, 1[$.

7°) Soit $u \in \mathbb{R}$. $\cos u = 0 \iff u \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$, donc le domaine de définition de \tan est $D = \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$.

En tant que quotient de fonctions dérivables, \tan est dérivable sur D et, pour tout $u \in D$, $\tan'(u) = \frac{\cos^2 u - (-\sin u) \sin u}{\cos^2 u} = \frac{1}{\cos^2 u}$.

8°)

◇ L'intégrale de l'énoncé, que l'on notera $I(\alpha)$, est bien définie car $[\frac{1}{2}, \sin^2 \alpha] \subset]0, 1[$ et f est continue sur $]0, 1[$.

Posons $J(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x f(t) dt$, pour tout $x \in]0, 1[$. Ainsi J est dérivable sur $]0, 1[$ et

$I(\alpha) = J(\sin^2 \alpha)$, donc par dérivation d'une fonction composée, I est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et $I'(\alpha) = 2 \cos \alpha \sin \alpha J'(\sin^2 \alpha) = 2 \cos \alpha \sin \alpha \frac{\ln(\sin^2 \alpha)}{\sin \alpha \cos^3 \alpha}$, car $\sin \alpha > 0$ et $\cos \alpha > 0$.

Ainsi, $I'(\alpha) = \frac{4 \ln \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$, or I' étant continue,

$$I(\alpha) = I\left(\frac{\pi}{4}\right) + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha} I'(u) du, \text{ donc } I(\alpha) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha} \frac{4 \ln \sin u}{\cos^2 u} du.$$

◇ En intégrant par parties, d'après la question précédente,

$$I(\alpha) = \left[4(\ln \sin u) \tan u \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha} 4 \tan u \frac{\cos u}{\sin u} du = 4 \tan \alpha \ln \sin \alpha + 2 \ln 2 - 4\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right).$$

Finalement, $I(\alpha) = 4(\tan \alpha) \ln(\sin \alpha) - 4\alpha + 2 \ln 2 + \pi$.

9°) Par définition de la dérivée de \ln en 1, $\frac{\ln t - \ln 1}{t - 1} \xrightarrow[t \rightarrow 1]{} \ln'(1) = 1$. Or,

$$\begin{aligned} 4(\tan \alpha) \ln(\sin \alpha) &= 2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \ln(\sin^2 \alpha) \\ &= 2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \frac{\ln(\sin^2 \alpha)}{1 - \sin^2 \alpha} (1 - \sin^2 \alpha) \\ &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{\ln(\sin^2 \alpha)}{1 - \sin^2 \alpha}, \end{aligned}$$

donc par composition des limites, $4(\tan \alpha) \ln(\sin \alpha) \xrightarrow[\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}]{} 0$.

On en déduit que $\int_{\frac{1}{2}}^{\sin^2(\alpha)} f(x) dx \xrightarrow{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} -2\pi + 2 \ln 2 + \pi = 2 \ln 2 - \pi$.

10°) Soit $x \in]0, 1[$. D'après l'énoncé, $x = \sin^2(\arcsin(\sqrt{x}))$ et d'après la continuité de \arcsin , $\arcsin(\sqrt{x}) \xrightarrow{x \rightarrow 1} \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$, car $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ et $\frac{\pi}{2} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

À nouveau par composition des limites, on en déduit que

$$\int_{\frac{1}{2}}^x f(t) dt = \int_{\frac{1}{2}}^{[\sin(\arcsin \sqrt{x})]^2} f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow 1} -\pi + 2 \ln 2.$$

Ceci montre que $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx$ est bien définie et que $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = -\pi + 2 \ln 2$.

11°) Lorsque $\alpha \in]0, \frac{\pi}{4}[$, le calcul de la question 8 reste valable. Ainsi,

$$\int_{\sin^2 \alpha}^{\frac{1}{2}} f(x) dx = -(4(\tan \alpha) \ln(\sin \alpha) - 4\alpha + 2 \ln 2 + \pi).$$

$\tan \alpha \ln(\sin \alpha) = \frac{\sin(\alpha) \ln(\sin(\alpha))}{\cos(\alpha)}$, or $\sin \alpha \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0$ et d'après les croissances comparées, $x \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, donc $\sin(\alpha) \ln(\sin(\alpha)) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0$, puis $\tan \alpha \ln(\sin \alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0$. On en déduit que

$$\int_{\sin^2 \alpha}^{\frac{1}{2}} f(x) dx \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} -2 \ln 2 - \pi.$$

De même qu'en question 10, $\int_x^{\frac{1}{2}} f(t) dt = \int_{[\sin(\arcsin \sqrt{x})]^2}^{\frac{1}{2}} f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\pi - 2 \ln 2$, car $\arcsin(0) = 0$.

On a ainsi montré que $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$ est bien définie et que $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = -2 \ln 2 - \pi$.

12°) D'après l'énoncé,

$$\begin{aligned} \int_a^c g(t) dt + \int_c^b g(t) dt &= \lim_{x \rightarrow a} \int_x^c g(t) dt + \lim_{y \rightarrow b} \int_c^y g(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\int_x^c g(t) dt + \lim_{y \rightarrow b} \int_c^y g(t) dt \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} \left(\int_x^c g(t) dt + \int_c^y g(t) dt \right), \end{aligned}$$

donc d'après la relation de Chasles pour les intégrales ordinaires,

$\int_a^c g(t) dt + \int_c^b g(t) dt = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} \left(\int_x^y g(t) dt \right)$, ce qui permet de conclure car cette dernière quantité ne dépend pas de c .

13°) D'après les questions précédentes, avec $c = \frac{1}{2}$, $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}} dx$ est bien définie

$$\text{et } \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}} dx = -2\pi.$$

C) Un peu de théorie

14°)

◇ f étant continue, elle possède une primitive que l'on notera F .

Alors $\int_x^b f(t) dt = F(b) - F(x)$. F est dérivable, donc elle est continue en a .

Ainsi, $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} F(a)$ ce qui prouve que

$$\int_x^b f(t) dt = F(b) - F(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt.$$

De même, on montre que $\int_a^x f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow a} \int_a^b f(t) dt$.

Cela signifie que la définition de $\int_a^b f(t) dt$ donnée après la question 4 est cohérente avec la notion usuelle d'intégrale.

◇ On a vu que $\frac{\sin t}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$, donc si l'on pose $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $f(0) = 1$, on définit une application f continue de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} . D'après ce qui précède, $\int_x^1 f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} \int_0^1 f(t) dt$, donc $\int_x^1 \frac{\sin t}{t} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} \int_0^1 f(t) dt$, ce qui prouve que $\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt$ est bien définie.

15°) Posons, pour tout $x \in [a, b[$, $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

$F'(x) = f(x) \geq 0$, donc F est croissante. Alors, d'après le théorème de la limite monotone, il existe $L \in \mathbb{R}$ telle que $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} L$ si et seulement si l'application

$x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée, ce qu'il fallait démontrer.

16°)

◇ D'après la question précédente, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in [a, b[$,

$\int_a^x f(t) dt \leq M$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que pour tout $x \in [a, b[$,

$\int_a^x g(t) dt \leq \int_a^x f(t) dt \leq M$, donc l'application $x \mapsto \int_a^x g(t) dt$ est majorée, or pour

tout t , $g(t) \geq 0$, donc toujours d'après la question précédente, $\int_a^b g(t) dt$ est définie.

◇ Pour tout $t \in [1, +\infty[$, $0 \leq \frac{|\cos t|}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$, or d'après la question 3, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est

définie, donc $\int_1^{+\infty} \frac{|\cos t|}{t^2} dt$ est définie.

17°)

◇ Soit $t \in [a, b[$. Supposons d'abord que $f(t) \geq 0$. Alors $f^+(t) = f(t) = |f(t)|$ et $f^-(t) = 0$, donc $|f(t)| = f^+(t) + f^-(t)$ et $f(t) = f^+(t) - f^-(t)$.

De même, si $f(t) \leq 0$, alors $f^-(t) = -f(t) = |f(t)|$ et $f^+(t) = 0$, donc $|f(t)| = f^+(t) + f^-(t)$ et $f(t) = f^+(t) - f^-(t)$.

En conclusion, $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$.

◇ On en déduit que $f^+ = \frac{1}{2}(f + |f|)$ et $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$, donc f^+ et f^- sont continues.

◇ Supposons que $\int_a^b |f(t)| dt$ est définie.

Pour tout $t \in [a, b]$, $0 \leq f^+(t) \leq f^+(t) + f^-(t) = |f(t)|$, donc d'après la question précédente, $\int_a^b f^+(t) dt$ est définie.

De même, $0 \leq f^- \leq |f|$, donc $\int_a^b f^-(t) dt$ est aussi définie. Alors, pour tout $x \in [a, b]$, $\int_a^x f(t) dt = \int_a^x f^-(t) dt - \int_a^x f^-(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow b} \int_a^b f^+(t) dt - \int_a^b f^-(t) dt \in \mathbb{R}$. Ceci prouve que $\int_a^b f(t) dt$ est définie.

D) Calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$

18°) D'après la question 14, $\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt$ est définie, donc d'après la question 12, il suffit de montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est définie.

En intégrant par parties, pour $x \in]1, +\infty[$, on obtient $\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt = \left[\frac{-\cos t}{t} \right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt$.

$\left| \frac{\cos x}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, donc d'après le principe des gendarmes, $\frac{\cos x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

D'après la question 16, $\int_1^{+\infty} \frac{|\cos t|}{t^2} dt$ est définie, donc d'après la question 17, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$

est définie. On en déduit que $\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \cos(1) - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$, ce qu'il fallait démontrer, car cette dernière quantité est réelle.

19°) Soit $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $R(n)$ l'assertion suivante : $\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2kt)$.

Pour $n = 0$, une somme vide étant nulle, il s'agit de montrer que $\frac{\sin t}{\sin t} = 1$, ce qui est vrai.

Pour $n \geq 0$, supposons $R(n)$. Alors $1 + 2 \sum_{k=1}^{n+1} \cos(2kt) = \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} + 2 \cos(2n+2)t$,

donc pour établir $R(n+1)$, il suffit de montrer que

$$(C) : \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} + 2 \cos(2n+2)t = \frac{\sin((2n+3)t)}{\sin t}.$$

Or $(C) \iff \sin(2n+3)t - \sin(2n+1)t = 2 \cos(2n+2)t \sin t$, ce qui est vrai d'après la formule $\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$.

$$20^\circ) \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2kt) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 2n+1, \text{ donc l'application } t \mapsto \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}$$

se prolonge en une application continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, notée g . Ainsi, de même qu'en question 14, on en déduit que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) dt$. Notons J_n cette intégrale.

D'après la question précédente, et le fait qu'en $t = 0$, $1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2kt) = 2n+1 = g(0)$,

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2kt) \right) dt = \frac{\pi}{2} + 2 \sum_{k=1}^n \left[\frac{\sin(2kt)}{2k} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}. \text{ On en déduit que } J_n = \frac{\pi}{2}.$$

21°) \diamond Posons $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{t} dt$, qui est bien définie car

$\frac{\sin(2n+1)t}{t} = \frac{\sin(2n+1)t}{(2n+1)t} \times (2n+1) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 2n+1$, donc $t \mapsto \frac{\sin(2n+1)t}{t}$ se prolonge en 0 en une application continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

$I_n - J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t) \sin(2n+1)t dt$. h étant C^1 , on peut intégrer par parties :

$$I_n - J_n = \left[h(t) \frac{-\cos(2n+1)t}{2n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} h'(t) \frac{\cos(2n+1)t}{2n+1} dt,$$

donc $I_n - J_n = \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} h'(t) \cos(2n+1)t dt$, car $\cos(2n+1)\frac{\pi}{2} = 0$ et $h(0) = 0$.

Alors, par inégalité triangulaire, $|I_n - J_n| \leq \frac{1}{2n+1} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} |h'(t)| dt = \frac{C}{2n+1}$, où C est une quantité indépendante de n . Ainsi, d'après le principe des gendarmes,

$I_n - J_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, or $J_n = \frac{\pi}{2}$. Ceci démontre que $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$.

\diamond Reprenons la fonction f définie à la fin de la question 14. f étant continue sur \mathbb{R}_+ , elle possède au moins une primitive, que l'on notera F .

$$\text{Alors, } \frac{d}{dt} \left(\frac{F((2n+1)t)}{2n+1} \right) = F'((2n+1)t) = f((2n+1)t) = \frac{\sin((2n+1)t)}{(2n+1)t},$$

donc $t \mapsto \frac{F((2n+1)t)}{2n+1}$ est une primitive de $t \mapsto \frac{\sin((2n+1)t)}{(2n+1)t}$, ce qui montre que

$$I_n = (2n+1) \left[\frac{F((2n+1)t)}{2n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} f(t) dt.$$

On a donc montré que $\int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} f(x) dx \xrightarrow[n \in \mathbb{N}]{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$.

◇ On peut mettre ceci sous la forme $\int_1^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} f(x) dx \xrightarrow[n \in \mathbb{N}, n \rightarrow +\infty]{} \frac{\pi}{2} - \int_0^1 f(x) dx$, or on a montré en question 18 qu'il existe $L \in \mathbb{R}$ telle que $\int_1^x f(t) dt \xrightarrow[x \in \mathbb{R}, x \rightarrow +\infty]{} L$, donc par composition des limites, $\int_1^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} f(x) dx \xrightarrow[n \in \mathbb{N}, n \rightarrow +\infty]{} L$, puis par unicité de la limite, $L = \frac{\pi}{2} - \int_0^1 f(x) dx$. Mais par définition, $L = \int_1^{+\infty} f(t) dt$, donc $\frac{\pi}{2} = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ (d'après la question 12).