MPSI 2

Programme des colles de mathématiques.

Semaine 1 : du lundi 25 au vendredi 29 septembre.

Liste des questions de cours

1°) Si f est une bijection d'une partie E de $\mathbb{R}$ vers une partie F de $\mathbb{R}$, comment déduit-on le graphe de f^{-1} à partir du graphe de f ? Démontrez-le.

2°) Montrer à l'aide des complexes que $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$.

3°) Résoudre l'équation $\cos x = \cos(\frac{\pi}{3} - 2x)$.

4°) Résoudre l'équation $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 2$.

5°) Tracer les graphes des fonctions sin et tan.

6°) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\sin x < x$.

7°) Pour tout $x \in [-1, 1]$, montrer que $\arccos\, x + \arcsin\, x = \frac{\pi}{2}$.

8°) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour des intégrales d'applications continues définies sur un intervalle $[a, b]$.

9°) Si f est une application continue d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$ et si $u : J \longrightarrow I$ et $v : J \longrightarrow I$ sont des applications dérivables sur un intervalle J, déterminer la dérivée de $t \longmapsto \int_{u(t)}^{v(t)} f(x)dx$.

10°) Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

11°) Montrer que $\frac{\ln(t)}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

12°) Tracer le graphe de $x \longmapsto x^\alpha$, en distinguant les cas où $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{Z}$ avec $\alpha < 0$ et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Les thèmes de la semaine

Il s'agit d'une première approche de la dérivation et de l'intégration des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On admet les théorèmes nécessaires et aucune maîtrise théorique n'est attendue des élèves à ce sujet. On définit et l'on étudie les fonctions usuelles.
Concernant l'intégration, les formules de changement de variable et d'intégration par parties seront seulement au programme en semaine 2.
Concernant les fonctions usuelles, la trigonométrie hyperbolique attendra également la semaine 2. De plus, les fonctions arcsin, arccos et arctan ont déjà été définies, mais elles n'ont pas encore fait l'objet d'exercices. Il est préférable d'attendre la semaine 2 pour les utiliser en colles.

1 Quelques généralités sur les applications

Ce paragraphe donne quelques définitions et propriétés concernant des applications ou des fonctions d'un ensemble quelconque vers un ensemble quelconque.

Domaine de définition d'une fonction.

Image directe d'une partie par une application.

Restriction et corestriction d'une application.

Image et antécédents d'un élément.
Application injective, surjective, bijective.

Composition, associativité de la composition.

Bijection réciproque d'une bijection.
Une application f est bijective si et seulement si il existe g telle que $f \circ g$ et $g \circ f$ valent l'identité.

2 Les fonctions numériques

Graphe d'une fonction numérique.

Construction du graphe de l'application réciproque par symétrie par rapport à la première diagonale.

Parité, imparité, périodicité.

Fonctions majorées, minorées, bornées.

Fonctions monotones, fonctions strictement monotones.

Combinaison linéaires de fonctions, produit et quotient de fonctions.

3 Applications polynomiales

Les définitions et propriétés de ce paragraphe sont admises pour le moment. Aucune maîtrise théorique des polynômes n'est attendue à ce stade de l'année.

Définition des polynômes à coefficients réels (vus comme des applications polynomiales pour le moment), degré, racine.
Degré d'un produit.

Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sont des racines distinctes de P, il existe un polynôme Q tel que
$P(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_k)Q(x)$.
Le nombre de racines d'un polynôme non nul est inférieur ou égal à son degré.

4 Trigonométrie

4.1 Les fonctions circulaires

Remarque. Concernant l'usage des complexes, on s'appuie pour le moment sur les connaissances de Terminale des élèves. Les complexes seront développés en cours ultérieurement.

Définition. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On admet que le complexe $e^{i\theta}$ est sur le cercle unité et que θ est l'angle $\widehat{M_1 M_0 M_{e^{i\theta}}}$ (en notant M_z le point d'affixe z).
On pose $\cos(\theta) = Re(e^{i\theta})$ et $\sin(\theta) = Im(e^{i\theta})$, c'est-à-dire :

Formules d'Euler : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

Définition des fonctions tangente et cotangente.

Dans un triangle rectangle, formules donnant les cosinus, sinus et tangente d'un angle en fonction des longueurs des côtés.

Graphes des fonctions cos, sin et tan.

4.2 Formulaire de trigonométrie

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Formules de symétries : Passage de θ à $-\theta$, $\pi-\theta$, $\pi+\theta$, $\frac{\pi}{2}-\theta$ et $\frac{\pi}{2}+\theta$.
Visualisation de ces formules sur le cercle trigonométrique.

Formule d'addition :
$\cos(a+b)$, $\cos(a-b)$, $\sin(a+b)$, $\sin(a-b)$, $\tan(a+b)$, $\tan(a-b)$.

Formules de duplication : $\cos(2a)$, $\sin(2a)$ et $\tan(2a)$.

Premières formules de linéarisation :
$\cos^2 a$, $\sin^2 a$, $2\cos a.\cos b = \cos(a+b)+\cos(a-b)$, $2\sin a.\sin b = \cos(a-b)-\cos(a+b)$,
$2\sin a.\cos b = \sin(a+b)+\sin(a-b)$.

Formules de factorisation : $\cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$
et formules analogues pour $\cos p - \cos q$ et $\sin p \pm \sin q$.
Ces formules sont hors programme, mais l'étudiant doit savoir les retrouver.

Formules : en posant $u = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, on a $\cos\theta = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$, $\quad\sin\theta = \dfrac{2u}{1+u^2}$, $\quad\tan\theta = \dfrac{2u}{1-u^2}$.

4.3 Equations trigonométriques

$\cos u = \cos v \iff u \equiv \pm v$ modulo 2π.
$\sin u = \sin v \iff (u \equiv v$ modulo $2\pi) \vee (u \equiv \pi - v$ modulo $2\pi)$.
$\tan u = \tan v \iff u \equiv v$ modulo π.
Écriture de $A\cos x + B\sin x$ sous la forme $r\cos(x-\varphi)$.

5 Dérivation

5.1 Définition

Equation de la corde joignant les points du graphe de f d'abscisses x_0 et x_1.

Pour $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, où I est un intervalle, dérivée de f en $x_0 \in I$. Equation de la tangente.

Remarque. Les aspects théoriques concernant les notions de limite et de dérivée seront abordés ultérieurement. L'objectif de ce chapitre est essentiellement de mettre en place des techniques de calculs.

Applications dérivables sur I, de classe D^1 ou C^1 sur I.
Applications n fois dérivables, de classe D^n ou C^n, de classe C^∞.

5.2 Formulaire de dérivation

Dérivée d'une combinaison linéaire de fonctions, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.
Dérivée d'une bijection réciproque.

Dérivées des fonctions trigonométriques.

$\dfrac{d^n}{dx^n}(f(ax+b)) = a^n f^{(n)}(ax+b)$,
$\cos^{(n)}(x) = \cos(x+n\frac{\pi}{2})$, $\sin^{(n)}(x) = \sin(x+n\frac{\pi}{2})$,
$\dfrac{d^n}{dx^n}\left(\dfrac{1}{1+x}\right) = \dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$.

5.3 Dérivation et monotonie

Théorème admis pour le moment : Soit f dérivable sur un intervalle I. f est constante (resp : croissante, décroissante) sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ \ f'(x) = 0$ (resp : $f(x) \geq 0, f(x) \leq 0$).
Si $f'(x)$ est de signe constant sur I et si $\{x \in I / f'(x) = 0\}$ est fini, alors f est strictement monotone.

6 Intégration

Définition informelle de $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ lorque f est continue, en tant qu'aire algébrique.

Propriétés de l'intégrale (admises) : linéarité, relation de Chasles, croissance de l'intégrale, inégalité triangulaire.
Si $f\ :\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et positive avec $\int_a^b f(t)dt = 0$, alors $f = 0$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz.

7 Primitivation

Primitive d'une application continue, unicité à une constante additive près.

Théorème fondamental de l'analyse (admis) : Si $f\ :\ I \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, $x \longmapsto \displaystyle\int_{x_0}^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en x_0.
Application au calcul d'intégral. Notation $\int f(t)dt$ pour désigner une primitive à une constante près.

8 Fonctions Logarithmes et puissances

8.1 Quelques théorèmes d'analyse

On admet pour le moment le théorème de la limite monotone, le fait qu'une application continue sur un segment atteint ses bornes, le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de la bijection.

Definition puis caractérisation d'un C^n difféomorphime entre deux intervalles de $\mathbb{R}$.

8.2 Les fonctions ln et exp

Définition : Pour tout $x > 0$, $\ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$. Propriétés de la fonction logarithme.
On note exp le C^∞-difféomorphisme réciproque, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Propriétés de $x \longmapsto e^x$.
Graphe de ln et exp.

8.3 Fonctions puissances

Graphes de $x \longmapsto x^n$ sur $\mathbb{R}$ lorsque $n \in \mathbb{N}$, sur $\mathbb{R}^*$ lorsque $n \in \mathbb{Z}$ avec $n < 0$, graphe de $x \longmapsto x^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$ lorque $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Prévision pour la semaine prochaine :

Etude d'une fonction, fonctions usuelles, changement de variable dans une intégrale, intégration par parties.