Résumé de cours :
Semaine 3, du 18 au 22 septembre.

Dérivation et intégration

1 Fonctions Logarithmes et puissances (suite)

1.1 Fonctions puissances

Définition. Un monôme de degré $n \in \mathbb{N}$ est une application de la forme $x \longmapsto ax^n$, où a est un paramètre réel. Cette application est définie sur $\mathbb{R}$.
Une fonction polynomiale est une somme finie de monômes.
Lorsque $n \in \mathbb{Z}$ avec $n < 0$, $x \longmapsto x^n$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.
Représentation graphique de $x \longmapsto x^n$ lorsque $n \in \mathbb{Z}$: A connaître.

Représentation graphique de $x \longmapsto x^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, lorsque x décrit $\mathbb{R}_+^*$: A connaître.
Convention : Pour tout $b \in \mathbb{R}_+^*$, $0^b = 0$ et $\boxed{0^0 = 1}$.

2 Etude d'une fonction

2.1 Plan d'étude

Plan d'étude d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

1. Calcul du domaine de définition de f.
2. Si f est paire, impaire ou/et périodique, on peut réduire le domaine d'étude.
3. Calcul de $f'(x)$ et étude de son signe.
4. Tableau de variations de f. Indiquez notamment les limites de f aux bornes des intervalles.
5. Etude des branches infinies si $f(x) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$.

2.2 Etude des branches infinies

Soit $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. On suppose que $f(x) \underset{x \to \varepsilon\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$.

1. S'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x \to \varepsilon\infty}{\longrightarrow} \mu$, on dit que le graphe de f admet une direction asymptotique de pente μ.
   — S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) - \mu x \underset{x \to \varepsilon\infty}{\longrightarrow} \alpha$, la droite affine d'équation $y = \mu x + \alpha$ est une asymptote de la courbe au voisinage de $\varepsilon\infty$.
   — Si $f(x) - \mu x \underset{x \to \varepsilon\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$, on dit que le graphe de f présente au voisinage de $\varepsilon\infty$ une branche parabolique de pente μ.

En particulier, lorsque $\frac{f(x)}{x} \underset{x\to\varepsilon\infty}{\longrightarrow} 0$, on est en présence d'une branche parabolique horizontale.
- Autres cas : il y a seulement une direction asymptotique.

2. Si $\frac{f(x)}{x} \underset{x\to\varepsilon\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$, le graphe de f admet une branche parabolique verticale.
3. Autres cas : on ne peut rien dire.

3 Déformations du graphe

Notation. f désigne une fonction de D dans $\mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}$.

Propriété. On fixe un réel a.
- Le graphe de $x \longmapsto f(x) + a$ se déduit du graphe de f par la translation de vecteur $a\overrightarrow{\jmath}$.
- Le graphe de $x \longmapsto f(x+a)$ se déduit du graphe de f par la translation de vecteur $-a\overrightarrow{\imath}$. A savoir établir.
- Le graphe de $x \longmapsto f(a-x)$ se déduit du graphe de f par la symétrie orthogonale selon la droite verticale d'abscisse $\frac{a}{2}$.
- Le graphe de $x \longmapsto f(ax)$ se déduit du graphe de f par l'affinité orthogonale d'axe invariant Oy et de coefficient $\frac{1}{a}$, qui correspond, en identifiant un point avec le couple de ses coordonnées, à la tranformation $(x, y) \longmapsto (\frac{x}{a}, y)$ (A savoir établir). Ceci a pour effet,
  - lorsque $a > 1$, d'écraser le graphe de f d'un facteur a vers l'axe des ordonnées, parallèlement à l'axe Ox,
  - lorsque $0 < a < 1$, d'étirer le graphe de f d'un facteur $\frac{1}{a}$ autour de l'axe Oy, parallèlement à l'axe Ox.
- Le graphe de $x \longmapsto af(x)$ se déduit du graphe de f par une affinité d'axe invariant Ox et de coefficient a, i.e par la transformation $(x, y) \longmapsto (x, ay)$.

4 Trigonométrie hyperbolique

Définition. On définit les fonctions usuelles suivantes :
- cosinus hyperbolique : $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$,
- sinus hyperbolique : $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$,
- tangente hyperbolique : $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{th}x = \frac{\text{sh}x}{\text{ch}x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

Propriété. Les fonctions sh, ch et th sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et
$\text{ch}' = \text{sh}, \quad \text{sh}' = \text{ch}, \text{th}'(x) = 1 - \text{th}^2 x = \frac{1}{\text{ch}^2 x}$.
Il faut connaître les graphes de sh, ch et th.

Toute formule de la trigonométrie circulaire est associée avec une formule duale de la trigonométrie hyperbolique. Cependant, le programme officiel se limite à la formule suivante :
Formule : $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$.

Mais il n'est pas interdit de connaître quelques formules de trigonométrie hyperbolique :
- $\text{ch}(a + b) = \text{ch}a.\text{ch}b + \text{sh}a.\text{sh}b$,
- $\text{sh}(a + b) = \text{sh}a.\text{ch}b + \text{ch}a.\text{sh}b$,
- $\text{ch}^2 a = \frac{\text{ch}(2a) + 1}{2}$, $\text{sh}^2 a = \frac{\text{ch}(2a) - 1}{2} \geq 0$.

5 Applications trigonométriques réciproques

Les graphes des fonctions usuelles de ce chapitre sont à connaître.

5.1 Trigonométrie circulaire

La fonction arcsin : l'application sin : $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1,1]$ est surjective, continue et strictement croissante. On note arcsin son application réciproque, de $[-1,1]$ dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Elle est continue, impaire et strictement croissante sur $[-1,1]$.
La restriction de sin à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est un C^∞-difféomorphisme sur $]-1,1[$, dont le C^∞-difféomorphisme réciproque est la restriction de arcsin à $]-1,1[$.
Pour tout $x \in]-1,1[$, $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

La fonction arccos : l'application cos : $[0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$ est surjective, continue et strictement décroissante. On note arccos son application réciproque, de $[-1,1]$ dans $[0,\pi]$. Elle est continue et strictement décroissante sur $[-1,1]$.
La restriction de cos à $]0,\pi[$ est un C^∞-difféomorphisme sur $]-1,1[$, dont le C^∞-difféomorphisme réciproque est la restriction de arccos à $]-1,1[$.
Pour tout $x \in]-1,1[$, $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Propriété. $\forall t \in [-1,1] \quad \cos(\arccos t) = t$ et $\sin(\arcsin\, t) = t$, mais en général, $\arccos(\cos t) \neq t$.
Plus précisément, $\arccos(\cos t) = t \Longleftrightarrow t \in [0,\pi]$.
Ainsi, lorsque $t \notin [0,\pi]$, $\arccos(\cos t) = t_0$ où $t_0 \in [0,\pi]$ et $\cos t = \cos t_0$.

La fonction arctan : l'application tan $:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$ est un C^∞-difféomorphisme strictement croissant, dont le C^∞-difféomorphisme réciproque est noté.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

5.2 Trigonométrie hyperbolique

Les fonctions réciproques des fonctions ch, sh et th ne sont pas au programme.

La fonction argsh : sh est un C^∞-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dont le difféomorphisme réciproque est noté argsh ("argument sinus hyperbolique"). Ainsi argsh est une application C^∞, impaire, strictement croissante. $\text{argsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
A savoir établir : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{argsh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

La fonction argch : L'application ch est une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $[1,+\infty[$. Son application réciproque est notée argch. C'est une bijection continue strictement croissante de $[1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$.
ch est un C^∞-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]1,+\infty[$, donc argch est C^∞ sur $]1,+\infty[$.
$\text{argch}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. Pour tout $x \in [1,+\infty[$, $\text{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.

La fonction argth : th est un C^∞-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$, dont le difféomorphisme réciproque est noté argth Ainsi argth est une application C^∞, impaire, strictement croissante de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$. $\text{argth}'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$. Pour tout $x \in]-1,1[$, $\text{argth} x = \dfrac{1}{2}\ln\Big(\dfrac{1+x}{1-x}\Big)$.

6 Calculs d'intégrales

6.1 Changement de variables

Théorème. On suppose que f est une application continue d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$, et que φ est une application **de classe** C^1 d'un intervalle J dans I. Alors,

$$\forall(\alpha,\beta)\in J^2 \quad \boxed{\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx.} \tag{1}$$

Lorsque l'on remplace un membre de cette égalité par l'autre, on dit que l'on effectue le changement de variable $x=\varphi(t)$.
Démonstration à connaître.

Propriété. Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$ et soit f une application continue sur $[-a,a]$.
Si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\ dt = 2\int_0^a f(t)\ dt$. Si f est impaire, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\ dt = 0$.

Théorème. Soit $T\in\mathbb{R}_+^*$. On suppose que f est une fonction continue et T-périodique définie sur $\mathbb{R}$.
Alors, $\forall t_0\in\mathbb{R} \quad \displaystyle\int_0^T f(t)\ dt = \int_{t_0}^{T+t_0} f(t)\ dt$.
Démonstration à connaître.

6.2 Intégration par parties

Théorème. Soit $u: I\longrightarrow\mathbb{R}$ et $v: I\longrightarrow\mathbb{R}$ deux applications de classe C^1 sur I.
Pour tout $(a,b)\in I^2$, $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)\ dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\ dt$.
Démonstration à connaître.

Théorème. Soit $u: I\longrightarrow\mathbb{R}$ et $v: I\longrightarrow\mathbb{R}$ deux applications de classe C^1 sur I.
Alors, $\displaystyle\int u(t)v'(t)\ dt = u(t)v(t) - \int u'(t)v(t)\ dt,\ \ t\in I$.

Les ensembles

7 Ensembles et éléments

Axiome d'extensionnalité : Si E et F sont deux ensembles, alors
$E=F$ si et seulement si pour tout $x\in E$, $x\in F$ et pour tout $x\in F$, $x\in E$.

Définition. $\{a\}$ est un singleton.
Lorsque $a\neq b$, $\{a,b\}$ est appelé une paire.

Définition. Un prédicat P sur un ensemble E est une application de E dans $\{V,F\}$, où V symbolise le vrai et F le faux.

Définition d'un ensemble en compréhension : Si E est un ensemble et P un prédicat sur E, alors $F=\{x\in E/P(x)\}$ est un ensemble.
De plus, pour tout $x\in E$, $x\in F \Longleftrightarrow P(x)$.

Le paradoxe de Russell :
Notons A la collection de tous les ensembles et posons $B=\{x\in A/x\notin x\}$. Alors $B\in B$ si et seulement si $B\notin B$, ce qui est impossible. Cela signifie que A n'est pas un ensemble !
À connaître.