

TD 2 : corrigé d'un exercice

Exercice 2.26 :

◇ *Méthode trigonométrique :*

Nécessairement, l'inconnue x doit être positive afin que \sqrt{x} soit défini.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

Posons $\theta = 2\arctan\sqrt{x} \in [0, \pi[$.

Alors $\sqrt{x} = \tan \frac{\theta}{2}$ et d'après le cours, $\frac{1-x}{1+x} = \cos \theta$ et $\frac{2\sqrt{x}}{1+x} = \sin \theta$.

Ceci prouve déjà que $\frac{1-x}{1+x}$ et $\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$ sont dans $[-1, 1]$, donc que les quantités $\arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

et $\arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$ sont définies. Ainsi, le domaine de définition de l'équation est \mathbb{R}_+ .

De plus, $(E) \iff \pi = \arccos(\cos \theta) + \arcsin(\sin \theta)$.

Lorsque $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$, $\arcsin(\sin \theta) = \arcsin(\sin(\pi - \theta))$ et $\pi - \theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$,

donc $\arcsin(\sin \theta) = \pi - \theta$. Alors $(E) \iff \pi = \theta + \pi - \theta \iff \pi = \pi$, ce qui est vrai.

Lorsque $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $(E) \iff \pi = 2\theta$, ce qui est faux.

Ainsi, $(E) \iff \theta \geq \frac{\pi}{2} \iff \frac{\theta}{2} \geq \frac{\pi}{4} \iff \sqrt{x} \geq 1 \iff x \geq 1$.

◇ Pour les deux méthodes suivantes, on recherche d'abord directement le domaine de définition de l'équation :

Soit $x \in \mathbb{R}_+$: $\frac{1-x}{1+x} \in [-1, 1] \iff -1 - x \leq 1 - x \leq 1 + x$, car $1 + x > 0$, donc

$\frac{1-x}{1+x} \in [-1, 1] \iff x \geq 0$, ce qui est vrai. De plus $(1 - \sqrt{x})^2 \geq 0$, donc $1 + x \geq 2\sqrt{x}$

puis $\frac{2\sqrt{x}}{1+x} \in [0, 1]$. On a montré que le domaine de définition de l'équation est \mathbb{R}_+ .

◇ *Seconde méthode trigonométrique :* Soit $x \in [1, +\infty[$. Posons $\theta = \arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

$\theta \in [0, \pi]$, donc $\sin \theta \geq 0$, or $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$, donc $\sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}$. De même,

on montre que $\cos\left(\arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)^2}$. Ainsi,

$$\sin\left(\arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)\right) = \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{1+x} + \sqrt{1 - \frac{1+x^2-2x}{1+x^2+2x}} \cdot \sqrt{1 - \frac{4x}{1+x^2+2x}}$$

$$\text{donc } \sin\left(\arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)\right) = \frac{(1-x)2\sqrt{x}}{(1+x)^2} + \frac{\sqrt{4x} \cdot \sqrt{(1-x)^2}}{(1+x)^2} = 0, \text{ car}$$

lorsque $x \geq 1$, $\sqrt{(1-x)^2} = |1-x| = x-1$.

De plus, pour $x \geq 1$, $\arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ et $\arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

donc $\arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) \in \left[\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}\right]$. Or $\sin|_{\left[\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}\right]}$ est injective, donc

(E) $\iff \sin\left(\arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)\right) = \sin(\pi) \iff 0 = 0$. Ceci montre que (E) est vraie pour tout $x \geq 1$.

Lorsque $x \in [0, 1[$, $\frac{1-x}{1+x} > 0$ et $\frac{2\sqrt{x}}{1+x} \geq 0$, donc $\arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

et $\arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi, $\arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) < \pi$ et x n'est pas solution de l'équation.

On a ainsi retrouvé que l'ensemble des solutions est $[1, +\infty[$.

◇ *Méthode analytique :*

On note f l'application $x \mapsto \arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$. On a déjà vu que f est définie et continue sur \mathbb{R}_+ .

De plus, $\frac{1-x}{1+x} = -1 \iff 1 = -1$, $\frac{1-x}{1+x} = 1 \iff x = 0$ et

$\frac{2\sqrt{x}}{1+x} = 1 \iff (1-\sqrt{x})^2 = 0 \iff x = 1$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

Sur cet ensemble, on calcule que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-2}{(1+x)^2} \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{(1-x)^2}{(1+x)^2}}} + \frac{\frac{1+x}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}}{(1+x)^2} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x}{(1+x)^2}}} \\ &= \frac{2}{1+x} \frac{1}{\sqrt{4x}} + \frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)} \frac{1}{\sqrt{(1-x)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} (1 + \operatorname{sgn}(1-x)). \end{aligned}$$

Lorsque $x > 1$, $f'(x) = 0$, donc f est constante sur $]1, +\infty[$, puis par continuité sur $[1, +\infty[$, or $f(1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$, donc lorsque $x \geq 1$, on retrouve que x est solution de (E).

Lorsque $x \in]0, 1[$, $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}(1+x)} > 0$, donc f est strictement croissante sur $]0, 1[$.

Soit y, z tels que $x < y < z < 1$. Alors $f(x) < f(y) < f(z)$, or $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow 1^-} f(1) = \pi$, donc par passage à la limite, $f(y) \leq \pi$, donc $f(x) < \pi$, ce qui montre que lorsque $x \in]0, 1[$, x n'est pas solution de (E).