

DM 5

Problème 1 : Topologies

Lorsque X est un ensemble, si \mathcal{T} est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$, on dit que \mathcal{T} est une topologie sur X si et seulement si

- $\emptyset \in \mathcal{T}$ et $X \in \mathcal{T}$;
- Pour tout ensemble I , pour toute famille $(U_i)_{i \in I}$ d'éléments de \mathcal{T} , $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$;
- Pour tout $U, V \in \mathcal{T}$, $U \cap V \in \mathcal{T}$.

1°) Soit X un ensemble. Montrer que $\{\emptyset, X\}$ et $\mathcal{P}(X)$ sont des topologies sur X .

2°) On suppose que \mathcal{T} est une topologie sur X .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et U_1, \dots, U_n n éléments de \mathcal{T} . Montrer que $U_1 \cap \dots \cap U_n \in \mathcal{T}$.

Si U est une partie de \mathbb{R} , on dit que U est un ouvert de \mathbb{R} si et seulement si :

$\forall x \in U, \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset U$.

3°) Les ensembles suivants sont-ils des ouverts de \mathbb{R} (on justifiera les réponses) ?

1. \emptyset ,
2. \mathbb{R} ,
3. $[a, b]$, où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$,
4. $]a, b[$, où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.

4°) Montrer que l'ensemble des ouverts de \mathbb{R} est une topologie sur \mathbb{R} .

5°) Soit X et I deux ensembles avec $I \neq \emptyset$. Soit $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$ une famille de topologies sur X . Montrer que $\bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$ est une topologie sur X .

6°) Soit X un ensemble et \mathcal{A} un sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$.

Montrer qu'on peut définir la plus petite topologie sur X contenant \mathcal{A} .

Problème 2 :

distributivité de la réunion par rapport à l'intersection.

Dans tout ce problème, E désigne un ensemble et n est un entier naturel non nul.

$A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$ désignent $2n$ parties de E .

On note \mathbb{N}_n l'ensemble des entiers compris entre 1 et n

et $\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)$ l'ensemble des parties de \mathbb{N}_n .

L'objet du problème est de montrer selon plusieurs méthodes la propriété (C_n) suivante :

$$(C_n) : \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap B_i) = \bigcap_{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_n)} \left(\left(\bigcup_{i \in X} A_i \right) \cap \left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}_n \setminus X} B_i \right) \right).$$

1°) Lorsque $n = 1$, montrer que (C_1) est vraie.

2°) Soit I un ensemble non vide, $(F_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E et G une partie de E . Montrer que $\left(\bigcap_{i \in I} F_i \right) \cup G = \bigcap_{i \in I} (F_i \cup G)$ et $\left(\bigcup_{i \in I} F_i \right) \cap G = \bigcup_{i \in I} (F_i \cap G)$.

3°) On considère deux nouvelles parties de E , notées A_{n+1} et B_{n+1} .

On note $Q = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_{n+1}) / n+1 \in X\}$.

Montrer que $\bigcap_{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_n)} \left(\left(\bigcup_{i \in X \cup \{n+1\}} A_i \right) \cap \left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}_n \setminus X} B_i \right) \right) = \bigcap_{X \in Q} \left(\left(\bigcup_{i \in X} A_i \right) \cap \left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}_{n+1} \setminus X} B_i \right) \right)$.

4°) En déduire une démonstration de (C_n) par récurrence sur n .

5°) Proposer une seconde démonstration de (C_n) , en procédant par double inclusion et en passant aux éléments.

6°) Soit I et J deux ensembles non vides. Pour tout $i \in I$ et $j \in J$, on suppose que $A_{i,j}$ est une partie de E . On note $\mathcal{F}(I, J)$ l'ensemble des applications de I dans J .

Montrer que $\bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{i,j} = \bigcup_{f \in \mathcal{F}(I, J)} \bigcap_{i \in I} A_{i,f(i)}$.

En déduire que $\bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} A_{i,j} = \bigcap_{f \in \mathcal{F}(I, J)} \bigcup_{i \in I} A_{i,f(i)}$.

7°) Soit I un ensemble non vide. Pour tout $i \in I$ et $j \in \{0, 1\}$, on suppose que $A_{i,j}$ est une partie de E . On note $\mathcal{P}(I)$ l'ensemble des parties de I . Déduire de la question précédente que

$$\bigcup_{i \in I} (A_{i,0} \cap A_{i,1}) = \bigcap_{X \in \mathcal{P}(I)} \left(\left(\bigcup_{i \in X} A_{i,0} \right) \cap \left(\bigcap_{i \in I \setminus X} A_{i,1} \right) \right).$$

En déduire une nouvelle démonstration de (C_n) .