Résumé de cours :
Semaine 5, du 2 au 6 octobre.

1 Relations binaires

1.1 Relations d'ordre

Définition. Une relation binaire R sur un ensemble E est appelée une relation d'ordre si et seulement si R est réflexive, antisymétrique et transitive.

Définition. Une relation d'ordre R sur un ensemble E est totale si et seulement si pour tout couple (x, y) de E^2, x et y sont comparables, c'est-à-dire $(xRy) \vee (yRx)$. Sinon, on dit que l'ordre est partiel.

Exemple. $\diamond$ Si A est un ensemble, la relation d'inclusion est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(A)$, partielle dès que A possède plus de deux éléments.
$\diamond$ Si $(E, \leq_E)$ est un ensemble ordonné, l'ordre lexicographique est un ordre sur E^n. Il est total lorsque $\leq_E$ est total. Il faut savoir le démontrer lorsque $n = 2$.

Définition. Soit F une partie de E et $m \in E$. On dit que m est un majorant de F si et seulement si pour tout $a \in F$, $a \preceq m$. On définit de même la notion de minorant d'une partie de E.
On dit qu'une partie est majorée si et seulement si elle possède au moins un majorant.
On dit qu'une partie est minorée si et seulement si elle possède au moins un minorant.
On dit qu'une partie est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée.

Définition. Si F est une partie de E et $m \in E$, on dit que m est le maximum de F si et seulement si m majore F et $m \in F$. On le note $\max(F)$. On défnit de même le minimum de F.

Définition. La borne supérieure de F est le minimum de l'ensemble des majorants (lorsqu'il existe). On le note $\sup(F)$. La borne inférieure de F est le maximum de l'ensemble des minorants (lorsqu'il existe). On le note $\inf(F)$.

Exemple. Si $\mathcal{F}$ est une partie de $\mathcal{P}(A)$ (où A est un ensemble), alors, au sens de l'inclusion, $\mathcal{F}$ possède une borne supérieure et une borne inférieure : $\sup(\mathcal{F}) = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$ et $\inf(\mathcal{F}) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$, en convenant que l'intersection vide vaut A. Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et $A \subset E$.
Si A possède un maximum, alors A possède une borne supérieure et $\sup A = \max A$.
Cependant, il est "fréquent" que A ne possède pas de maximum, mais possède une borne supérieure. Dans ce cas, $\sup A \notin A$.

Propriété. Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et soit $A, B \in \mathcal{P}(E)$.
Si A et B possédent des bornes supérieures : si $B \subset A$, alors $\sup(B) \leq \sup(A)$.
Si A et B possédent des bornes inférieures : si $B \subset A$, alors $\inf(B) \geq \inf(A)$.
Démonstration à connaître.

Passage à la borne supérieure (resp : inférieure) : Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et soit A une partie de E possédant une borne supérieure.

$\diamond$ Soit $e \in E$. Alors $\sup(A) \leq e \Longleftrightarrow [\forall a \in A,\ \ a \leq e]$.
Le fait de passer de la propriété "$\forall a \in A,\ \ a \leq e$" à l'affirmation "$\sup(A) \leq e$" s'appelle le *passage à la borne supérieure*.
$\diamond$ Il faut savoir le justifier : si $[\forall a \in A,\ \ a \leq e]$, alors e est un majorant de A, or $\sup(A)$ est le plus petit des majorants, donc $\sup(A) \leq e$.
$\diamond$ ATTENTION, en général, $\sup(A) \notin A$, donc le passage à la borne supérieure ne se réduit pas au fait d'appliquer la propriété "$\forall a \in A,\ \ a \leq e$" avec $a = \sup(A)$.
$\diamond$ De même, si B est une partie de E possédant une borne inférieure, le principe du passage à la borne inférieure consiste à passer de la propriété, "$\forall a \in A,\ \ a \geq e$" à "$\inf(A) \geq e$".

Propriété de la borne supérieure : Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.

Propriété. Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Soit $s \in \mathbb{R}$. Alors
$s = \sup(A) \Longleftrightarrow [\forall a \in A,\ \ a \leq s] \wedge [\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists a \in A,\ \ s - \varepsilon < a]$.
Démonstration à connaître.

Propriété. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée.
Il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers $\sup(A)$.
Démonstration à connaître.

Propriété. Soit A une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$. Soit $m \in \mathbb{R}$. Alors
$m = \inf(A) \Longleftrightarrow [\forall a \in A,\ \ a \geq m] \wedge [\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists a \in A,\ \ m + \varepsilon > a]$.

Définition. Soit F une partie de E et m un élément de F.
m est maximal dans F si et seulement si $\forall x \in F (x \succeq m \Longrightarrow x = m)$, i.e $\forall x \in F,\ \ \neg(x \succ m)$.
m est minimal dans F si et seulement si $\forall x \in F (x \preceq m \Longrightarrow x = m)$, i.e $\forall x \in F,\ \ \neg(x \prec m)$.

Propriété. Lorsque la relation d'ordre est totale, toute partie F de E possède au plus un élément maximal et dans ce cas, c'est le maximum de F. Idem avec minimal et minimum.

> **Exercice.** Si E est un ensemble fini et non vide, pour tout ordre défini sur E, montrer que E possède au moins un élément minimal.
> A connaître.

2 Ordres dans $\mathbb{N}$

2.1 L'ordre naturel et la soustraction

L'ordre naturel : Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$,
on convient que $n \leq m$ si et seulement si $\exists k \in \mathbb{N},\ \ m = n + k$.
Dans ce cas, k est unique. On le note $k = m - n$.
La relation binaire $\leq$ ainsi définie est un ordre total sur $\mathbb{N}$.

Définition. On vient de montrer que, si n est un entier naturel,
pour tout $h, k \in \mathbb{N}$, $n + h = n + k$ implique $h = k$. On dit que n est régulier.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit $m, n \in \mathbb{N}$. Si $m < n$, alors $m + 1 \leq n$.

2.2 Multiplication dans $\mathbb{N}$ et relation de divisibilité

Multiplication entre entiers : Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose
$0 \times m = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \ s(n) \times m = n \times m + m$.
Ces conditions définissent l'addition entre entiers.

Propriétés de la multiplication :
- 0 est absorbant : $\forall m \in \mathbb{N},\ \ m \times 0 = 0 \times m = 0$.
- 1 est neutre : $\forall m \in \mathbb{N},\ \ m \times 1 = 1 \times m = m$.
- Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition : $\forall n, m, p \in \mathbb{N},\ \ n(m + p) = (nm) + (np) = nm + np$: les dernières parenthèses sont inutiles si l'on convient que la multiplication est prioritaire devant l'addition.
- Associativité : $\forall n, m, k \in \mathbb{N},\ \ (n \times m) \times k = n \times (m \times k)$.
- Commutativité : $\forall n, m \in \mathbb{N},\ \ n \times m = m \times n$.

La relation d'ordre est compatible avec la multiplication :
Pour tout $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $ac \leq bd$.

Propriété. Soit $n, k \in \mathbb{N}$.
Si $nk = 0$, alors $n = 0$ ou $k = 0$.
Si $nk = 1$, alors $n = k = 1$.

Définition. Soit $n, m \in \mathbb{N}$. On dit que n divise m, que n est un diviseur de m, ou encore que m est un multiple de n si et seulement si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $m = kn$. On note $n|m$.

Remarque. Tout entier divise 0 mais 0 ne divise que lui-même.

Définition. un nombre premier est un entier n supérieur à 2 dont les seuls diviseurs sont 1 et n.

Propriété. La relation de divisibilité est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}$.
Il faut savoir le démontrer.

2.3 Maximum et minimum dans $\mathbb{N}$

Propriété. Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ possède un maximum.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit $a, b \in \mathbb{N}$ avec $b \neq 0$. Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$. On dit que q et r sont le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un minimum.
Il faut savoir le démontrer.

Remarque. Un ensemble ordonné dont toute partie non vide possède un plus petit élément est appelé un ensemble bien ordonné.

Principe de la descente infinie : pour montrer que "$\forall n \in \mathbb{N},\ \ R(n)$", une alternative à la récurrence est de raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\neg[R(n)]$. Ainsi, l'ensemble $F = \{n \in \mathbb{N} / \neg R(n)\}$ possède un minimum n_0. On peut parfois aboutir à une contradiction en construisant un entier vérifiant $m < n_0$ et $m \in F$.