

DM 4. Corrigé

Problème 1 : une intégrale dépendant d'un paramètre.

1°) $\varphi(0) = \frac{1}{2}$, $\varphi(1) = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2$ et $\varphi(2) = [\arctant]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

2°) Soit $x, y \in \mathbb{R}_+$ avec $x < y$.

Soit $t \in]0, 1]$. $t^x = e^{x \ln t} \geq e^{y \ln t} = t^y$ car $\ln t \leq 0$.

Lorsque $t = 0$, $0^y = 0$ et $0^x \geq 0$, donc on a encore $t^x \geq t^y$.

Ainsi, pour tout $t \in [0, 1]$, $\frac{1}{1+t^x} \leq \frac{1}{1+t^y}$, donc par croissance de l'intégrale, $\varphi(x) \leq \varphi(y)$, ce qui prouve que φ est croissante sur \mathbb{R}_+ .

3°) Soit $x, y \in \mathbb{R}_+$ avec $x \leq y$.

$\varphi(x) - \varphi(y) = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^x} - \frac{1}{1+t^y} \right) dt = \int_0^1 \frac{t^y - t^x}{(1+t^x)(1+t^y)} dt$, donc

$0 \leq \varphi(y) - \varphi(x) \leq \int_0^1 \frac{t^x - t^y}{1 \times 1} dt = \int_0^1 (t^x - t^y) dt$.

De plus, $\int_0^1 (t^x - t^y) dt = \left[\frac{t^{x+1}}{x+1} - \frac{t^{y+1}}{y+1} \right]_0^1 = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1}$,

donc $\int_0^1 (t^x - t^y) dt = \frac{y-x}{(x+1)(y+1)} \leq y-x$.

4°) Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

Lorsque $y \leq x$, en remplaçant dans la question précédente le couple (x, y) par (y, x) , on obtient que $|\varphi(y) - \varphi(x)| \leq x - y = |x - y|$. Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, indépendamment de l'ordre entre x et y , $|\varphi(y) - \varphi(x)| \leq |y - x|$, or $|y - x| \xrightarrow{y \rightarrow x} 0$, donc d'après le principe des gendarmes, $\varphi(y) - \varphi(x) \xrightarrow{y \rightarrow x} 0$, puis $\varphi(y) \xrightarrow{y \rightarrow x} \varphi(x)$.

5°) Soit $x > 0$. $1 - \varphi(x) = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^x} \right) dx = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t^x} dt$, donc

$0 \leq 1 - \varphi(x) \leq \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Le principe des gendarmes permet à nouveau de conclure.

6°) Soit $x \geq 0$. On souhaite intégrer par parties, en primitivant $t \mapsto 1$ et en dérivant $t \mapsto \frac{1}{1+t^x}$, mais cela nécessite de dériver $t \mapsto t^x$ sur $[0, 1]$, ce qui pose un problème

en $t = 0$ lorsque $x < 1$. Pour contourner ce problème, on intègre par parties sur $[\varepsilon, 1]$ où $\varepsilon > 0$, puis on fait tendre ε vers 0.

$$\text{Soit } \varepsilon \in]0, 1[. \int_{\varepsilon}^1 \frac{dt}{1+t^x} = \left[\frac{t}{1+t^x} \right]_{\varepsilon}^1 + \int_{\varepsilon}^1 t \frac{xt^{x-1}}{(1+t^x)^2} dt = \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^x} + x \int_{\varepsilon}^1 \frac{t^x}{(1+t^x)^2} dt.$$

Or $0 \leq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^x} \leq \varepsilon$, donc d'après le principe des gendarmes, $\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^x} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$.

De plus, si f est une application continue sur $[0, 1]$, d'après le théorème fondamental de l'analyse, elle possède une primitive sur $[0, 1]$, notée F . F est dérivable, donc continue,

donc $\int_{\varepsilon}^1 f(t) dt = F(1) - F(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} F(1) - F(0) = \int_0^1 f(t) dt$. On en déduit, en faisant

tendre ε vers 0 dans l'intégration par parties que $\varphi(x) = \frac{1}{2} + x \int_0^1 \frac{t^x}{(1+t^x)^2} dt$.

$$7^{\circ}) \quad \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \frac{1}{x}(\varphi(x) - \frac{1}{2}) = \int_0^1 \frac{t^x}{(1+t^x)^2} dt,$$

$$\text{donc } \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \int_0^1 \frac{t^x + 1 - 1}{(1+t^x)^2} dt = \varphi(x) - \Psi(x), \text{ où } \Psi(x) = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^x)^2}.$$

Nous allons montrer que Ψ est continue sur \mathbb{R}_+ en nous inspirant de la question 4.

Soit $x, y \in \mathbb{R}_+$ avec $x < y$. On sait déjà que, pour tout $t \in [0, 1]$, $t^x \geq t^y$. On en déduit par croissance de l'intégrale que $\Psi(x) \leq \Psi(y)$. Ainsi,

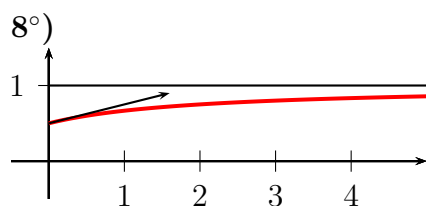
$$0 \leq \Psi(y) - \Psi(x) = \int_0^1 \frac{(1+t^x)^2 - (1+t^y)^2}{(1+t^x)^2(1+t^y)^2} dt \leq \int_0^1 (t^{2x} + 2t^x - t^{2y} - 2t^y) dt,$$

$$\text{donc } 0 \leq \Psi(y) - \Psi(x) \leq \int_0^1 (t^x - t^y)(2 + t^x + t^y) dt \leq 4 \int_0^1 (t^x - t^y) dt.$$

On en déduit que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$, $|\Psi(x) - \Psi(y)| \leq 4|y - x|$, ce qui montre, de même qu'en question 4, que Ψ est continue sur \mathbb{R}_+ . En particulier, Ψ est continue en 0, donc $\Psi(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \Psi(0) = \frac{1}{4}$.

$$\text{Ainsi, } \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \varphi(0) - \Psi(0) = \frac{1}{4}.$$

Ceci prouve que φ est dérivable en 0 et que $\varphi'(0) = \frac{1}{4}$.



9°) Soit $x > 1$. $\frac{t^x - 0}{t - 0} = t^{x-1} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$, ainsi, $t \mapsto t^x$ est dérivable en 0 et, pour tout

$t \in [0, 1]$, $\frac{d}{dt}(t^x) = xt^{x-1}$. On en déduit que, pour tout $t \in [0, 1]$ (également pour $t = 0$),

$\frac{d}{dt}(\ln(1+t^x)) = \frac{xt^{x-1}}{1+t^x}$, qui est continue sur $[0, 1]$. On peut donc intégrer par parties :

$$\int_0^1 \frac{t^x}{1+t^x} dt = \int_0^1 \left(\frac{t}{x} \right) \frac{d}{dt}(\ln(1+t^x)) dt = \left[\frac{t}{x} \ln(1+t^x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln(1+t^x)}{x} dt,$$

donc $1 - \varphi(x) = \frac{\ln 2}{x} - \frac{1}{x} \int_0^1 \ln(1+t^x) dt$.

Or, pour tout $u \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+u) \leq u$ (pour le montrer, il suffit d'étudier $g(u) = u - \ln(1+u)$, dont la dérivée $g'(u) = 1 - \frac{1}{1+u}$ est positive sur \mathbb{R}_+ , donc g est croissante sur \mathbb{R}_+ avec $g(0) = 0$).

Ainsi, $0 \leq \int_0^1 \ln(1+t^x) dt \leq \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

On en déduit que $1 - \varphi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln 2}{x}$.

Problème 2 : π est irrationnel.

1°) a) $f_1(x) = 2ax - bx^2$, donc $f_1'(x) = 2a - 2bx$.

En particulier, $f_1'(x) = 0 \iff x = \frac{a}{b} = r$.

Pour la suite de cette question, on posera $g = f_1$.

Premier cas : Supposons que $r > 0$.

Alors g' est positive sur $[0, r]$ et négative sur $[r, 2r]$. donc $g(x)$ croît de 0 à $g(r)$ entre 0 et r , puis décroît de $g(r)$ à $g(2r)$ entre r et $2r$.

Or $g(r) = 2a\frac{a}{b} - b\frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2}{b}$ et $g(2r) = 2a \cdot 2r - b4r^2 = 4\frac{a^2}{b} - 4b\frac{a^2}{b^2} = 0$.

Ainsi, $\max_{x \in [0, 2r]} g(x) = \frac{a^2}{b}$ et $\min_{x \in [0, 2r]} g(x) = 0$.

Second cas : Supposons maintenant que $r < 0$ ($r \neq 0$ car $r \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$). Ainsi, $a < 0$.

$g'(x)$ est positif entre $2r$ et r , puis négatif entre r et 0, donc $g(x)$ croît entre $2r$ et r , de $g(2r) = 0$ à $g(r)$, puis décroît entre r et 0, de $g(r)$ à 0.

Ainsi, comme dans le premier cas, $\max_{x \in [0, 2r]} g(x) = \frac{a^2}{b}$ et $\min_{x \in [0, 2r]} g(x) = 0$.

1. b) Par inégalité triangulaire,

$$|I_n| \leq \int_{\min(0, 2r)}^{\max(0, 2r)} |f_n(x)| dx \leq \int_{\min(0, 2r)}^{\max(0, 2r)} \frac{1}{n!} \left(\frac{a^2}{b}\right)^n dx = 2|r| \frac{\alpha^n}{n!}, \text{ où } \alpha = \frac{a^2}{b}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $d_n = \frac{\alpha^n}{n!}$ et montrons que $d_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{\alpha}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $\frac{d_{n+1}}{d_n} \leq \frac{1}{2}$. Par récurrence sur n , on en déduit que, pour tout $n \geq N$, $0 \leq d_n \leq d_N \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Il en résulte, par le principe des gendarmes, que $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

2°) a) $I_0 = \int_0^{2r} \sin x dx = [-\cos x]_0^{2r} = 1 - \cos(2r)$, donc $I_0 = 2 \sin^2 r$.

2. b) Effectuons deux intégrations par parties successives :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{2r} (2ax - bx^2) \sin x \, dx = \left[(2ax - bx^2)(-\cos x) \right]_0^{2r} + \int_0^{2r} (\cos x)(2a - 2bx) \, dx \\
&= \left[(2a - 2bx)(\sin x) \right]_0^{2r} + \int_0^{2r} 2b \sin x \, dx,
\end{aligned}$$

or $2a - 2b \times 2\frac{a}{b} = 2a - 4a = -2a$, donc $I_1 = \left[2b(-\cos x) \right]_0^{2r} - 2a \sin(2r)$

puis $I_1 = 2b(1 - \cos(2r)) - 2a \sin(2r) = 4b \sin^2 r - 4a \sin r \cos r$.

En conclusion, $I_1 = 4 \sin r (b \sin r - a \cos r)$.

3°) a) Soit $n \geq 2$. Une première intégration par parties donne

$I_n = \left[f_n(x)(-\cos x) \right]_0^{2r} + \int_0^{2r} f'_n(x) \cos x \, dx$, or $f_n(0) = f_n(2r) = 0$, d'après la première question, donc une seconde intégration par parties donne

$I_n = \left[f'_n(x) \sin x \right]_0^{2r} - \int_0^{2r} f''_n(x) \sin x \, dx$. Mais $f'_n(x) = (2a - 2bx) \frac{(2ax - bx^2)^{n-1}}{(n-1)!}$,

donc toujours d'après la première question, $f'_n(0) = 0 = f'_n(2r)$ (car $n \geq 2$). Ainsi,

$$I_n = - \int_0^{2r} f''_n(x) \sin x \, dx.$$

3. b) On a vu que $f'_{n+1}(x) = (2a - 2bx)f_n(x)$, donc

$$\begin{aligned}
f''_{n+2}(x) &= -2bf_{n+1}(x) + (2a - 2bx)f'_{n+1}(x) \\
&= -2bf_{n+1}(x) + (2a - 2bx)^2 f_n(x) \\
&= 4a^2 f_n(x) - 2bf_{n+1}(x) + 4(b^2 x^2 - 2abx) f_n(x) \\
&= 4a^2 f_n(x) - 2bf_{n+1}(x) - 4b(2ax - bx^2) f_n(x) \\
&= 4a^2 f_n(x) - 2bf_{n+1}(x) - 4b(n+1)f_{n+1}(x) \\
&= 4a^2 f_n(x) - bf_{n+1}(x)(2 + 4(n+1)).
\end{aligned}$$

3. c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $R(n)$ l'assertion suivante : il existe $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ tels que $I_n = 2(a_n \cos r + b_n \sin r) \sin r$.

Démontrons $R(n)$ par récurrence double :

Pour $n = 0$ et $n = 1$, $I_0 = 2 \sin^2 r$ et $I_1 = 4 \sin r (b \sin r - a \cos r)$, donc $R(0)$ et $R(1)$ sont vraies.

Pour $n \geq 0$, supposons $R(n)$ et $R(n+1)$ et montrons $R(n+2)$.

$I_{n+2} = - \int_0^{2r} f''_{n+2}(x) \sin x \, dx = -4a^2 I_n + b I_{n+1} (4n+6)$, donc d'après l'hypothèse de récurrence, $I_{n+2} = 2 \sin r ((4n+6)b(a_{n+1} \cos r + b_{n+1} \sin r) - 4a^2(a_n \cos r + b_n \sin r))$, ce qui prouve $R(n+2)$.

4°) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $2r \notin \pi\mathbb{Z}$, donc $\sin(2r) \neq 0$.

$$\frac{qI_n}{\sin(2r)} = \frac{q}{\cos r} (a_n \cos r + b_n \sin r) = qa_n + b_n q \tan r = qa_n + pb_n \in \mathbb{Z}.$$

4. b) D'après la question 1.b, $\frac{qI_n}{\sin(2r)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout

$n \geq N$, $\left| \frac{qI_n}{\sin(2r)} \right| \leq \frac{1}{2}$, or $\frac{qI_n}{\sin(2r)} \in \mathbb{Z}$, donc pour tout $n \geq N$, $\frac{qI_n}{\sin(2r)} = 0$. Ainsi, pour tout $n \geq N$, $I_n = 0$.

$a \neq 0$ car $r \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{1}{4a^2}((4n+6)bI_{n+1} - I_{n+2})$. Ainsi, par une récurrence double descendante, on en déduit que pour tout $n \in \{0, \dots, N+1\}$, $I_n = 0$. En particulier, $I_0 = 0$, or $I_0 = 2 \sin^2 r$, donc $\sin r = 0$, ce qui est faux car $r \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$.

5°) Cette contradiction impose que $\tan r \notin \mathbb{Q}$. On a donc montré que, lorsque $r \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{Q} \implies \tan r \notin \mathbb{Q}$. La contraposée donne $\tan r \in \mathbb{Q} \implies r \notin \mathbb{Q}$.

Prenons $r = \frac{\pi}{4}$. Ainsi, $r \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ et $\tan r = 1 \in \mathbb{Q}$. Ainsi, $\frac{\pi}{4} \notin \mathbb{Q}$, puis $\pi \notin \mathbb{Q}$.

Problème 3 : Calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ lorsque x est un entier pair.

1°) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $R(n)$ l'assertion : P_n est une application polynomiale.

Pour $n = 1$, $R(1)$ est vraie d'après l'énoncé.

Pour $n \geq 1$, supposons $R(n)$ et montrons $R(n+1)$.

Clairement, si Q est une application polynomiale, alors $t \mapsto tQ(t)$ et $t \mapsto t^2Q(t)$ sont polynomiales. De plus, si Q est l'application polynomiale $x \mapsto a_0 + a_1x + \dots + a_Nx^N$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x Q(t)dt = a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + \dots + a_N\frac{x^{N+1}}{N+1}$, donc $x \mapsto \int_0^x Q(t)dt$ est encore polynomiale. D'après $R(n)$ et ces constatations, on en déduit que P_{n+1} est une application polynomiale, donc $R(n+1)$ est vraie.

$$2^\circ) \quad m_1 = \int_0^1 \left(-\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} \right) dx = -\frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{6}.$$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \int_0^x \left(-\frac{t^3}{4} + \frac{t^2}{2} \right) dt - x \int_0^x \left(-\frac{t^2}{4} + \frac{t}{2} \right) dt + \frac{x^2}{2}m_1 \\ &= -\frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{6} - x \left(-\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{4} \right) + \frac{x^2}{12} \\ &= \frac{x^4}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \frac{x^3}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) + \frac{x^2}{12} \\ &= \frac{x^4}{48} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{12}, \end{aligned}$$

$$\text{donc } m_2 = \frac{1}{240} - \frac{1}{48} + \frac{1}{36} = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{4 \times 5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{12} \frac{3 - 15 + 20}{4 \times 5 \times 3} = \frac{1}{6 \times 5 \times 3}.$$

En conclusion, $m_2 = \frac{1}{90}$.

3°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$P'_{n+1}(x) = xP_n(x) - \int_0^x P_n(t)dt - xP_n(x) + xm_n, \text{ donc } P'_{n+1}(x) = xm_n - \int_0^x P_n(t)dt.$$

On en déduit que $P''_{n+1}(x) = m_n - P_n(x)$.

4°) On fixe $k \in \mathbb{N}^*$.

◇ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Intégrons par parties :

$$\int_0^1 P_{n+1}(t) \cos(k\pi t) dt = \left[P_{n+1}(t) \frac{\sin(k\pi t)}{k\pi} \right]_0^1 - \int_0^1 P'_{n+1}(t) \frac{\sin(k\pi t)}{k\pi} dt,$$

donc à l'aide d'une nouvelle intégration par parties,

$$\int_0^1 P_{n+1}(t) \cos(k\pi t) dt = \left[P'_{n+1}(t) \frac{\cos(k\pi t)}{(k\pi)^2} \right]_0^1 - \int_0^1 P''_{n+1}(t) \frac{\cos(k\pi t)}{(k\pi)^2} dt,$$

or on a vu que $P'_{n+1}(x) = xm_n - \int_0^x P_n(t) dt$, donc $P'_{n+1}(0) = 0 = P'_{n+1}(1)$.

Ainsi, en utilisant la relation $P''_{n+1}(x) = m_n - P_n(x)$,

$$\text{on obtient } \int_0^1 P_{n+1}(t) \cos(k\pi t) dt = \frac{1}{(k\pi)^2} \int_0^1 P_n(t) \cos(k\pi t) dt - m_n \int_0^1 \frac{\cos(k\pi t)}{(k\pi)^2} dt.$$

Cette dernière intégrale est nulle,

$$\text{donc } \int_0^1 P_{n+1}(t) \cos(k\pi t) dt = \frac{1}{(k\pi)^2} \int_0^1 P_n(t) \cos(k\pi t) dt, \text{ ce qui prouve que la suite}$$

$$\left(\int_0^1 P_n(t) \cos(k\pi t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{(k\pi)^2}.$$

$$\diamond \text{ On en déduit que } \int_0^1 P_n(t) \cos(k\pi t) dt = \frac{I}{(k\pi)^{2(n-1)}},$$

$$\text{où } I = \int_0^1 P_1(t) \cos(k\pi t) dt = \int_0^1 \left(-\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} \right) \cos(k\pi x) dx.$$

Effectuons deux intégrations par parties successives :

$$\begin{aligned} I &= \left[\left(-\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} \right) \frac{\sin(k\pi x)}{k\pi} \right]_0^1 - \int_0^1 \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) \frac{\sin(k\pi x)}{k\pi} dx \\ &= \left[\left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) \frac{\cos(k\pi x)}{(k\pi)^2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{\cos(k\pi x)}{(k\pi)^2} dx, \end{aligned}$$

$$\text{ainsi } I = -\frac{1}{2} \frac{1}{(k\pi)^2}, \text{ puis } \int_0^1 P_n(t) \cos(k\pi t) dt = -\frac{1}{2(k\pi)^{2n}}.$$

5°) a) On vérifie que $P_1(0) = 0$ et d'après la définition de P_{n+1} , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n+1}(0) = 0$. Ainsi 0 est une racine de l'application polynomiale P_n . Alors, d'après le cours, il existe une application polynomiale Q_n telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$P_n(t) = tQ_n(t).$$

5. b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 4,

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^{2n}} = - \sum_{k=1}^N \pi^{2n} 2 \int_0^1 P_n(t) \cos(k\pi t) dt = -\pi^{2n} \int_0^1 Q_n(t) \sum_{k=1}^N 2t \cos(k\pi t) dt.$$

$$**6°) a)** \frac{\sin t - \sin 0}{t - 0} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \sin'(0) = \cos(0) = 1, \text{ donc par composition des limites,}$$

$$\frac{\sin(\frac{\pi t}{2})}{\frac{\pi t}{2}} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1. \text{ On en déduit que } \frac{t}{\sin(\frac{\pi t}{2})} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \ell = \frac{2}{\pi}.$$

6.b) Lorsque $x \neq 0$, on pose $\eta(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$ et on pose $\eta(0) = 0$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = 1 + x\eta(x)$.

$$\text{De plus, } \eta(x) = \frac{\cos(x) - \cos(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \cos'(0) = \sin(0) = 0.$$

$$**6. c)** \text{ Soit } t \in]0, 1]. \frac{f(t) - f(0)}{t} = \frac{\frac{t}{\sin(\frac{\pi}{2}t)} - \frac{2}{\pi}}{t} = \frac{t - \frac{2}{\pi} \sin(\frac{\pi}{2}t)}{t \sin(\frac{\pi}{2}t)} = \frac{1 - \frac{2}{\pi t} \sin(\frac{\pi}{2}t)}{\sin(\frac{\pi}{2}t)}.$$

D'après l'énoncé, $\sin x = x + x^2\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$,

$$\text{donc } \frac{f(t) - f(0)}{t} = \frac{1 - \frac{2}{\pi t}(\frac{\pi t}{2} + (\frac{\pi t}{2})^2\varepsilon(\frac{\pi t}{2}))}{\sin \frac{\pi t}{2}} = -\frac{\frac{\pi t}{2}}{\sin \frac{\pi t}{2}}\varepsilon\left(\frac{\pi t}{2}\right) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0,$$

donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

6. d) Soit $t \in]0, 1]$. $f'(t) = \frac{\sin \frac{\pi t}{2} - \frac{\pi}{2}t \cos \frac{\pi t}{2}}{(\sin \frac{\pi t}{2})^2}$.

D'après la question b, $\cos x = 1 + x\eta(x)$ où $\eta(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, donc

$$\frac{\sin x - x \cos x}{(\sin x)^2} = \frac{x + x^2\varepsilon(x) - x(1 + x\eta(x))}{(x + x^2\varepsilon(x))^2} = \frac{x^2(\varepsilon(x) - \eta(x))}{x^2(1 + x\varepsilon(x))} = \frac{\varepsilon(x) - \eta(x)}{1 + x\varepsilon(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Par composition des limites, on en déduit que $f'(t) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = f'(0)$, donc f' est continue en 0. De plus f est de classe C^1 sur $]0, 1]$ d'après le cours, donc f est bien C^1 sur $[0, 1]$.

7°) a) Soit $a \in \mathbb{C}$ et $N \in \mathbb{N}$.

$$(a - 1) \sum_{k=0}^N a^k = \sum_{k=0}^N a^{k+1} - \sum_{k=0}^N a^k = \sum_{k=1}^{N+1} a^k - \sum_{k=0}^N a^k = a^{N+1} - 1.$$

b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0, 1]$. On applique la question précédente avec $a = e^{i\pi t}$. On peut diviser par $1 - e^{i\pi t}$ car $\pi t \in]0, \pi]$. Ainsi,

$$\sum_{k=0}^N e^{ik\pi t} = \frac{1 - (e^{i\pi t})^{N+1}}{1 - e^{i\pi t}} = \frac{e^{i\pi t \frac{N+1}{2}} \sin(\frac{N+1}{2}\pi t)}{e^{i\pi t \frac{1}{2}} \sin(\frac{\pi t}{2})} = \frac{\sin(\frac{N+1}{2}\pi t)}{\sin(\frac{\pi t}{2})} e^{i\pi t \frac{N}{2}}.$$

c) Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0, 1]$. En passant à la partie réelle, on déduit de la question

$$\text{précédente que } \sum_{k=0}^N \cos(k\pi t) = \frac{\sin(\frac{N+1}{2}\pi t)}{\sin(\frac{\pi t}{2})} \cos\left(\pi t \frac{N}{2}\right),$$

$$\text{donc } 2t \sum_{k=1}^N \cos(k\pi t) = 2t \left(\frac{\sin(\frac{N+1}{2}\pi t)}{\sin(\frac{\pi t}{2})} \cos\left(\pi t \frac{N}{2}\right) - 1 \right),$$

or $2 \sin a \cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b)$,

$$\text{donc } 2 \sin\left(\frac{N+1}{2}\pi t\right) \cos\left(\pi t \frac{N}{2}\right) = \sin\left(N + \frac{1}{2}\right)\pi t + \sin \frac{\pi t}{2}.$$

$$\text{Ainsi, } 2t \sum_{k=1}^N \cos(k\pi t) = t \left(\frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)\pi t}{\sin \frac{\pi t}{2}} - 1 \right) = -t + f(t) \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)\pi t\right).$$

Cette égalité est encore vraie, car évidente, lorsque $t = 0$.

8°) Intégrons par parties :

$$\int_a^b \varphi(t) \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)\pi t\right) dt = \left[-\varphi(t) \frac{\cos\left(N + \frac{1}{2}\right)\pi t}{\left(N + \frac{1}{2}\right)\pi} \right]_a^b + \int_a^b \frac{\cos\left(N + \frac{1}{2}\right)\pi t}{\left(N + \frac{1}{2}\right)\pi} \varphi'(t) dt, \text{ donc}$$

$$\left| \int_a^b \varphi(t) \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)\pi t\right) dt \right| \leq \frac{1}{\left(N + \frac{1}{2}\right)\pi} \left(|\varphi(b)| + |\varphi(a)| + \int_a^b |\varphi'(t)| dt \right) = \frac{C}{\left(N + \frac{1}{2}\right)\pi},$$

où $C = |\varphi(b)| + |\varphi(a)| + \int_a^b |\varphi'(t)| dt$ ne dépend pas de N .

D'après le principe des gendarmes, on en déduit que $\int_a^b \varphi(t) \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)\pi t\right) dt \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$.

9°) D'après les questions 5.b et 7.c,

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^{2n}} = -\pi^{2n} \int_0^1 Q_n(t) (-t + f(t) \sin((N + \frac{1}{2})\pi t)) dt, \text{ or } \int_0^1 t Q_n(t) dt = m_n. \text{ De plus,}$$

f est de classe C^1 sur $[0, 1]$, donc d'après la question précédente, $\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^{2n}} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} m_n \pi^{2n}$.

On peut donc écrire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}} = m_n \pi^{2n}$.

En particulier, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$.