Feuille d'exercices 3.
Corrigé d'un exercice.

Exercice 3.10 :

1°) On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et n ensembles $x_1, \ldots, x_n$ tels que $x_1 \in x_2 \in \cdots \in x_n \in x_1$.
Posons $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Soit $y \in x$. Il existe $i \in \mathbb{N}_n$ tel que $y = x_i$. Alors, en convenant que $x_0 = x_n$, on a $x_{i-1} \in x_i = y$, donc $x_{i-1} \in y \cap x$ ce qui prouve que $y \cap x \neq \emptyset$, pour tout $y \in x$. Or x est non vide, donc ceci contredit l'axiome de fondation, ce qui permet de conclure.

Remarque : On peut aller un peu plus loin pour comprendre ce que signifie l'axiome de fondation : s'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} \in x_n$, alors en posant $x = \{x_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$, on montre que pour tout $y \in x$, $y \cap x \neq \emptyset$, donc l'axiome de fondation est faux.
Réciproquement, si l'on suppose faux l'axiome de fondation, il existe un ensemble x non vide tel que, pour tout $y \in x$, $y \cap x \neq \emptyset$.
x étant non vide, il existe $x_0 \in x$. Alors $x_0 \cap x \neq \emptyset$, donc il existe $x_1 \in x_0 \cap x$.
$x_1 \in x$, donc il existe $x_2 \in x_1 \cap x$.
À l'aide du principe de récurrence, on en déduit l'existence d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} \in x_n$.
Ainsi l'axiome de fondation équivaut à l'inexistence d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles qui est "décroissante" pour la relation d'appartenance. C'est pourquoi cet axiome s'appelle l'axiome de "fondation", par analogie avec le fait qu'un ordre est dit bien fondé si et seulement si il n'admet aucune suite infinie strictement décroissante.

2°) Notons $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{P}(M) \ / \ (0 \in A) \wedge (s(A) \subset A)\}$: $\mathcal{N}$ est l'ensemble des parties de M contenant 0 et closes par successeur. L'énoncé propose de poser $N = \bigcap_{A\in\mathcal{N}} A$.
M contient 0 et M est clos par successeur, donc $\mathcal{N} \neq \emptyset$, donc l'intersection précédente est bien définie et l'égalité $N = \bigcap_{A\in\mathcal{N}} A$ définit bien l'ensemble N. Montrons qu'il vérifie les axiomes de Peano.

- Pour tout $A \in \mathcal{N}$, $0 \in A$, donc $0 \in N$.
  Pour tout $x \in N$, x est un ensemble donc $s(x)$ est défini.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. $s(n) = n \cup \{n\}$, donc $n \in s(n)$, donc $s(n) \neq \emptyset$. Ainsi, $s(n) \neq 0$.

— Soit F une partie de N telle que $0 \in F$ et $s(F) \subset F$. Alors $F \in \mathcal{N}$, or $N = \bigcap_{A \in \mathcal{N}} A$, donc $N \subset F$. Or $F \subset N$, donc $F = N$.

— Soit $n, m \in N$ tels que $s(n) = s(m)$. Supposons que $n \neq m$.
$n \in \{n\} \subset \{n\} \cup n = s(n)$, donc $n \in s(m) = m \cup \{m\}$, mais $n \neq m$, donc $n \in m$.
De même, on montre que $m \in n$, donc $n \in m \in n$, or c'est impossible d'après la première question. On en déduit que $n = m$, ce qui conclut.