DM 5 : corrigé

Problème 1 : Topologies

1°) $\diamond$ Posons $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$: c'est bien un sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$, qui contient $\emptyset$ et X.
Soit I un ensemble et $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{T}$. Ainsi, pour tout $i \in I$, $U_i = \emptyset$ ou $U_i = X$.
S'il existe $i \in I$ tel que $U_i = X$, alors $X \subset \bigcup_{i\in I} U_i \subset X$, donc $\bigcup_{i\in I} U_i = X \in \mathcal{T}$. Sinon, alors $\bigcup_{i\in I} U_i = \emptyset \in X$.
Soit $U, V \in \mathcal{T}$. Si U ou V est égal à $\emptyset$, alors $U \cap V = \emptyset \in \mathcal{T}$. Sinon, alors $U = V = X$, donc $U \cap V = X \in \mathcal{T}$. Ainsi, dans tous les cas, $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$ et $U \cap V \in \mathcal{T}$.
Ceci prouve que $\mathcal{T}$ est une topologie sur X.
$\diamond$ Supposons maintenant que $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. Alors toute partie de X est un élément de $\mathcal{T}$, donc les trois propriétés de l'énoncé sont vérifiées. Ainsi $\mathcal{T}$ est une topologie sur X.

2°) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $R(n)$ l'assertion suivante :
pour tout $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{T}$, $A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{T}$.
Lorsque $n = 1$, $R(1)$ est clairement vraie.
On suppose que $n \in \mathbb{N}^*$ et $R(n)$.
Soit $A_1, \ldots, A_{n+1} \in \mathcal{T}$. D'après $R(n)$, $A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{T}$, or $\mathcal{T}$ est une topologie, donc $(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \cap A_{n+1} \in \mathcal{T}$, d'où $R(n + 1)$ d'après l'associativité de l'intersection.
D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R(n)$ est vraie, ce qu'il fallait démontrer.

3°)

1. Toute assertion de la forme $\forall x \in \emptyset, \ \ldots$ est vraie, donc $\emptyset$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $]x - 1, x + 1[\subset \mathbb{R}$, donc $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
3. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $a - \frac{\varepsilon}{2} \notin [a, b]$ et $a - \frac{\varepsilon}{2} \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$, donc $]a - \varepsilon, a + e[\not\subset [a, b]$. Ceci prouve que $[a, b]$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.
4. Soit $x \in]a, b[$. Ainsi $x - a > 0$ et $b - x > 0$. Posons $\varepsilon = \min(x - a, b - x) \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $y \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$. Alors $y > x - \varepsilon \geq x - (x - a) = a$, donc $y > a$ et $y < x + \varepsilon \leq x + (b - x) = b$, donc $y < b$. Ainsi, $y \in]a, b[$, ce qui prouve que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset]a, b[$. Ainsi $]a, b[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

4°) Notons $\mathcal{T}$ l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$.

— D'après la question précédente, $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{T}$.

— Soit I un ensemble et soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$. Posons $V = \bigcup_{i\in I} U_i$.

  Soit $x \in V$. Il existe $i \in I$ tel que $x \in U_i$. U_i étant un ouvert de $\mathbb{R}$, il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset U_i \subset V$. Ceci prouve que V est un ouvert.

— Soit U et V deux ouverts de $\mathbb{R}$. Soit $x \in U \cap V$. $x \in U$ et U est ouvert, donc il existe $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1[\subset U$. De même, il existe $\varepsilon_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2[\subset V$.

  Posons $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $]x-\varepsilon, x+\varepsilon| \subset]x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1[\subset U$ et $]x-\varepsilon, x+\varepsilon| \subset]x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2[\subset V$, donc $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset U \cap V$. Ceci prouve que $U \cap V$ est ouvert.

5°)

— Pour tout $i \in I$, $\emptyset \in \mathcal{T}_i$ et $X \in \mathcal{T}_i$, donc $\emptyset$ et X sont éléments de $\bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$.

— Soit J un ensemble et $(U_j)_{j\in J}$ une famille d'éléments de $\bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$.

  Soit $i \in I$: $(U_j)_{j\in J}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{T}_i$, qui est une topologie sur X, donc $\bigcup_{j\in J} U_j \in \mathcal{T}_i$. C'est vrai pour tout $i \in I$, donc $\bigcup_{j\in J} U_j \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$.

— Soit U et V deux éléments de $\bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$.

  Soit $i \in I$. U et V sont deux éléments de $\mathcal{T}_i$, qui est une topologie sur X, donc $U \cap V \in \mathcal{T}_i$. Ainsi, $U \cap V \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$.

Ceci démontre que $\bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$ est une topologie sur X.

6°) Notons $\mathbb{A}$ l'ensemble des topologies sur X qui contiennent $\mathcal{A}$ et posons $\mathcal{U} = \bigcap_{\mathcal{T}\in\mathbb{A}} \mathcal{T}$.

$\mathbb{A}$ est non vide car $\mathcal{P}(X) \in \mathbb{A}$, donc l'intersection précédente est bien définie.
$\mathcal{U}$ est une intersection d'ensembles contenant $\mathcal{A}$, donc $\mathcal{U}$ contient $\mathcal{A}$.
$\mathcal{U}$ est une intersection de topologies, donc c'est une topologie d'après la question précédente. Ainsi, $\mathcal{U} \in \mathbb{A}$.
De plus, si $\mathcal{S}$ est une topologie sur X contenant $\mathcal{A}$, alors $\mathcal{S} \in \mathbb{A}$, donc $\mathcal{U} = \bigcap_{\mathcal{T}\in\mathbb{A}} \mathcal{T}$ est inclus dans $\mathcal{S}$. Ainsi, $\mathcal{U}$ minore $\mathbb{A}$ au sens de l'inclusion.
$\mathcal{U}$ est donc bien la plus petite topologie sur X contenant $\mathcal{A}$.

Problème 2

1°) Avec $n=1$, $\bigcup_{i=1}^{1}(A_i \cap B_i) = A_1 \cap B_1$. De plus, $\mathcal{P}(\mathbb{N}_1) = \{\emptyset, \{1\}\}$, donc

$$\bigcap_{X\in\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)} \Big(\Big(\bigcup_{i\in X} A_i\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}_1\setminus X} B_i\Big)\Big) = \Big[\Big(\bigcup_{i\in\emptyset} A_i\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{i\in\{1\}} B_i\Big)\Big] \bigcap \Big[\Big(\bigcup_{i\in\{1\}} A_i\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{i\in\emptyset} B_i\Big)\Big],$$

or $\bigcup_{i\in\emptyset} A_i = \emptyset = \bigcup_{i\in\emptyset} B_i$, donc $\bigcap_{X\in\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)} \Big(\Big(\bigcup_{i\in X} A_i\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}_1\setminus X} B_i\Big)\Big) = B_1 \cap A_1$,
ce qui prouve (C_1).

2°)

$\diamond$ Soit $x \in E$.
Supposons que $x \in \Big(\bigcap_{i\in I} F_i\Big) \cup G$.

Si $x \in G$, alors pour tout $i \in I$, $x \in F_i \cup G$, donc $x \in \bigcap_{i\in I}(F_i \cup G)$.

Si $x \notin G$, alors $x \in \bigcap_{i\in I} F_i$, donc pour tout $i \in I$, $x \in F_i$, puis $x \in F_i \cup G$ et on a encore $x \in \bigcap_{i\in I}(F_i \cup G)$. Ceci démontre que $\Big(\bigcap_{i\in I} F_i\Big) \cup G \subset \bigcap_{i\in I}(F_i \cup G)$.

Réciproquement, supposons que $x \in \bigcap_{i\in I}(F_i \cup G)$.

Si $x \in G$, alors $x \in \Big(\bigcap_{i\in I} F_i\Big) \cup G$.

Supposons maintenant que $x \notin G$. Pour tout $i \in I$, $x \in F_i \cup G$, donc $x \in F_i$. Ainsi, $x \in \bigcap_{i\in I} F_i$, puis $x \in \Big(\bigcap_{i\in I} F_i\Big) \cup G$.

Ainsi, dans les deux cas, $x \in \Big(\bigcap_{i\in I} F_i\Big) \cup G$, ce qui montre la seconde inclusion.

$\diamond$ Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in \Big(\bigcup_{i\in I} F_i\Big) \cap G &\Longleftrightarrow (x \in G) \wedge (\exists i \in I,\ \ x \in F_i) \\ &\Longleftrightarrow (\exists i \in I,\ \ x \in F_i \cap G) \\ &\Longleftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I}(F_i \cap G). \end{aligned}$$

Ceci prouve que $\Big(\bigcup_{i\in I} F_i\Big) \cap G = \bigcup_{i\in I}(F_i \cap G)$.

3°)

$\diamond$ Soit $x \in \bigcap_{X\in\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)} \Big(\Big(\bigcup_{i\in X\cup\{n+1\}} A_i\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}_n\setminus X} B_i\Big)\Big)$.

Ainsi, pour tout $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_n)$, il existe $i \in X \cup \{n+1\}$ tel que $x \in A_i$, ou il existe $i \in \mathbb{N}_n \setminus X$ tel que $x \in B_i$.

Soit $Y \in Q$. Posons $X = Y \setminus \{n+1\}$, de sorte que $Y = X \sqcup \{n+1\}$. De plus $\mathbb{N}_n \setminus X = \mathbb{N}_{n+1} \setminus Y$, donc il existe $i \in Y$ tel que $x \in A_i$, ou il existe $i \in \mathbb{N}_{n+1} \setminus Y$ tel que $x \in B_i$. Ceci prouve que $x \in \Big(\bigcup_{i\in Y} A_i\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}_{n+1}\setminus Y} B_i\Big)$, pour tout $Y \in Q$,

donc $x \in \bigcap_{Y\in Q} \Big(\Big(\bigcup_{i\in Y} A_i\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}_{n+1}\setminus Y} B_i\Big)\Big)$. Ceci prouve que

$$\bigcap_{X\in\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)} \Big(\Big(\bigcup_{i\in X\cup\{n+1\}} A_i\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}_n\setminus X} B_i\Big)\Big) \subset \bigcap_{X\in Q} \Big(\Big(\bigcup_{i\in X} A_i\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}_{n+1}\setminus X} B_i\Big)\Big).$$

$\diamond$ Réciproquement, soit $x \in \bigcap_{X\in Q} \Big(\Big(\bigcup_{i\in X} A_i\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}_{n+1}\setminus X} B_i\Big)\Big)$. Ainsi, pour tout $Y \in Q$, il existe $i \in Y$ tel que $x \in A_i$ ou il existe $i \in \mathbb{N}_{n+1} \setminus Y$ tel que $x \in B_i$.
Soit $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_n)$. Posons $Y = X \cup \{n+1\}$. $Y \in Q$ donc il existe $i \in Y = X \cup \{n+1\}$ tel que $x \in A_i$, ou il existe $i \in \mathbb{N}_{n+1} \setminus Y = \mathbb{N}_n \setminus X$ tel que $x \in B_i$. On en déduit que $x \in \Big(\bigcup_{i\in X\cup\{n+1\}} A_i\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}_n\setminus X} B_i\Big)$, pour tout $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_n)$,

donc $x \in \bigcap_{X\in\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)} \Big(\Big(\bigcup_{i\in X\cup\{n+1\}} A_i\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}_n\setminus X} B_i\Big)\Big)$, ce qui prouve l'inclusion réciproque.

4°) L'initialisation de la récurrence provient de la question 1.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que (C_n) est vraie.
Considérons deux nouvelles parties A_{n+1} et B_{n+1} de E et montrons (C_{n+1}).

$\bigcup_{i=1}^{n+1}(A_i \cap B_i) = \Big[\bigcup_{i=1}^{n}(A_i \cap B_i)\Big] \cup (A_{n+1} \cap B_{n+1})$, donc en utilisant (C_n),

$$\bigcup_{i=1}^{n+1}(A_i \cap B_i) = \Big[\bigcap_{X\in\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)} \Big(\Big(\bigcup_{i\in X} A_i\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}_n\setminus X} B_i\Big)\Big)\Big] \cup (A_{n+1} \cap B_{n+1}).$$

Alors, d'après la question 2,

$$\bigcup_{i=1}^{n+1}(A_i \cap B_i) = \bigcap_{X\in\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)} \Big[\Big(\Big(\bigcup_{i\in X} A_i\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}_n\setminus X} B_i\Big)\Big) \cup (A_{n+1} \cap B_{n+1})\Big].$$

Or d'après la question 2, si F, G et K sont des parties de E,
$F \cup (G \cap K) = (F \cup G) \cap (F \cup K)$. Donc

$$\bigcup_{i=1}^{n+1}(A_i \cap B_i) = \bigcap_{X\in\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)} \Big[\Big(\Big(\bigcup_{i\in X} A_i\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}_n\setminus X} B_i\Big) \cup A_{n+1}\Big) \bigcap \Big(\Big(\bigcup_{i\in X} A_i\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}_n\setminus X} B_i\Big) \cup B_{n+1}\Big)\Big].$$

D'après la commutativité de la réunion,

$$\bigcup_{i=1}^{n+1}(A_i \cap B_i) = \bigcap_{X\in\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)} \Big[\Big(\Big(\bigcup_{i\in X\cup\{n+1\}} A_i\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}_n\setminus X} B_i\Big)\Big) \bigcap \Big(\Big(\bigcup_{i\in X} A_i\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{i\in(\mathbb{N}_n\setminus X)\cup\{n+1\}} B_i\Big)\Big)\Big].$$

D'après la question précédente,

$$\bigcup_{i=1}^{n+1}(A_i\cap B_i) = \Big[\bigcap_{X\in Q}\Big(\Big(\bigcup_{i\in X}A_i\Big)\bigcup\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}_{n+1}\setminus X}B_i\Big)\Big)\Big] \bigcap\Big[\bigcap_{X\in\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)}\Big(\Big(\bigcup_{i\in X}A_i\Big)\bigcup\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}_{n+1}\setminus X}B_i\Big)\Big)\Big],$$

or $\mathcal{P}(\mathbb{N}_{n+1}) = Q\sqcup\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)$, car une partie de $\mathbb{N}_{n+1}$ contient $n+1$ ou (exclusif) ne contient pas $n+1$. Ainsi, par commutativité de l'intersection,

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^{n+1}(A_i\cap B_i) &= \bigcap_{X\in Q\sqcup\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)}\Big(\Big(\bigcup_{i\in X}A_i\Big)\bigcup\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}_{n+1}\setminus X}B_i\Big)\Big)\\ &= \bigcap_{X\in\mathcal{P}(\mathbb{N}_{n+1})}\Big(\Big(\bigcup_{i\in X}A_i\Big)\bigcup\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}_{n+1}\setminus X}B_i\Big)\Big),\end{aligned}$$

ce qui prouve C_{n+1}.

5°) Soit $x\in\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\cap B_i)$. Il existe alors $i_0\in\mathbb{N}_n$ tel que $x\in A_{i_0}\cap B_{i_0}$.

Soit $X\in\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)$. Si $i_0\in X$, alors $x\in\bigcup_{i\in X}A_i$ et si $i_0\notin X$, alors $x\in\bigcup_{i\in\mathbb{N}_n\setminus X}B_i$. Donc dans tous les cas, $x\in\Big(\bigcup_{i\in X}A_i\Big)\bigcup\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}_n\setminus X}B_i\Big)$. C'est vrai pour tout $X\in\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)$, donc $x\in\bigcap_{X\in\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)}\Big(\Big(\bigcup_{i\in X}A_i\Big)\bigcup\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}_n\setminus X}B_i\Big)\Big)$.

Pour démontrer l'inclusion réciproque, on procède par contraposée : on suppose que $x\notin\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\cap B_i)$. Ainsi, on a $\neg(\exists i\in\mathbb{N}_n,\ (x\in A_i)\wedge(x\in B_i))$,
donc pour tout $i\in\mathbb{N}_n$, $x\notin A_i$ ou $x\notin B_i$.
Posons $X=\{i\in\mathbb{N}_n\ /\ x\notin A_i\}$.
Alors pour tout $i\in X$, $x\notin A_i$ et, lorsque $i\in\mathbb{N}_n\setminus X$, $x\in A_i$ donc $x\notin B_i$. On a donc $(\forall i\in X,\ \ x\notin A_i)\wedge(\forall i\in\mathbb{N}_n\setminus X,\ \ x\notin B_i)$,
c'est-à-dire $\neg[(\exists i\in X,\ \ x\in A_i)\vee(\exists i\in\mathbb{N}_n\setminus X,\ \ x\in B_i)]$. Ainsi, $x\notin\Big(\bigcup_{i\in X}A_i\Big)\bigcup\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}_n\setminus X}B_i\Big)$,
puis $x\notin\bigcap_{X\in\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)}\Big(\Big(\bigcup_{i\in X}A_i\Big)\bigcup\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}_n\setminus X}B_i\Big)\Big)$.

6°)

$$\begin{aligned}\diamond\ x\in\bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J}A_{i,j} &\iff \forall i\in I,\ \ \exists j\in J,\ \ x\in A_{i,j}\\ &\iff \forall i\in I,\ \ \exists f(i)\in J,\ \ x\in A_{i,f(i)}\\ &\iff \exists f\in\mathcal{F}(I,J),\ \ \forall i\in I,\ \ x\in A_{i,f(i)}\\ &\iff x\in\bigcup_{f\in\mathcal{F}(I,J)}\bigcap_{i\in I}A_{i,f(i)},\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

$\diamond$ Appliquons la propriété que l'on vient de démontrer en remplaçant les parties $A_{i,j}$ par leurs complémentaires dans E, notées $\overline{A_{i,j}}$: $\bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J}\overline{A_{i,j}} = \bigcup_{f\in\mathcal{F}(I,J)}\bigcap_{i\in I}\overline{A_{i,f(i)}}$, donc d'après le cours, $\overline{\bigcup_{i\in I}\bigcap_{j\in J}A_{i,j}} = \overline{\bigcap_{f\in\mathcal{F}(I,J)}\bigcup_{i\in I}A_{i,f(i)}}$, puis $\bigcup_{i\in I}\bigcap_{j\in J}A_{i,j} = \bigcap_{f\in\mathcal{F}(I,J)}\bigcup_{i\in I}A_{i,f(i)}$.

7°) D'après la question précédente, en posant $J = \{0,1\}$,
$\bigcup_{i\in I}(A_{i,0}\cap A_{i,1}) = \bigcap_{f\in\mathcal{F}(I,\{0,1\})}\bigcup_{i\in I}A_{i,f(i)}$.
Soit $x \in \bigcup_{i\in I}(A_{i,0}\cap A_{i,1})$. Soit $X\in\mathcal{P}(I)$.

Notons f l'application définie sur I par : pour tout $i\in I$, $f(i) = \begin{cases} 0 \text{ si } i\in X \\ 1 \text{ si } i\in I\setminus X\end{cases}$

Alors $x \in \bigcup_{i\in I}A_{i,f(i)} = \Big(\bigcup_{i\in X}A_{i,0}\Big)\bigcup\Big(\bigcup_{i\in I\setminus X}A_{i,1}\Big)$.

C'est vrai pour tout $X\in\mathcal{P}(I)$, donc $x\in\bigcap_{X\in\mathcal{P}(I)}\Big(\Big(\bigcup_{i\in X}A_{i,0}\Big)\bigcup\Big(\bigcup_{i\in I\setminus X}A_{i,1}\Big)\Big)$.

Réciproquement, soit $x\in\bigcap_{X\in\mathcal{P}(I)}\Big(\Big(\bigcup_{i\in X}A_{i,0}\Big)\bigcup\Big(\bigcup_{i\in I\setminus X}A_{i,1}\Big)\Big)$.
Soit $f\in\mathcal{F}(I,\{0,1\})$. Notons $X = \{i\in I \ / \ f(i)=0\}$.
Alors $x\in\Big(\bigcup_{i\in X}A_{i,0}\Big)\bigcup\Big(\bigcup_{i\in I\setminus X}A_{i,1}\Big) = \bigcup_{i\in I}A_{i,f(i)}$. C'est vrai pour tout $f\in\mathcal{F}(I,\{0,1\})$, donc $x\in\bigcap_{f\in\mathcal{F}(I,\{0,1\})}\bigcup_{i\in I}A_{i,f(i)}$.
En conclusion, on a montré par double inclusion que
$\bigcup_{i\in I}(A_{i,0}\cap A_{i,1}) = \bigcap_{X\in\mathcal{P}(I)}\Big(\Big(\bigcup_{i\in X}A_{i,0}\Big)\bigcup\Big(\bigcup_{i\in I\setminus X}A_{i,1}\Big)\Big)$.
En particulier, lorsque $I=\mathbb{N}_n$, qui est bien non vide, on retrouve la propriété (C_n), en remplaçant $A_{i,0}$ par A_i et $A_{i,1}$ par B_i.