

MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 4 : du lundi 16 au vendredi 20 octobre.

Liste des questions de cours

- 1°) Donner des exemples d'ordres partiels.
- 2°) Si $F \subset \mathcal{P}(E)$, déterminer les bornes supérieures et inférieures de F , pour la relation d'inclusion.
- 3°) Montrer qu'un ensemble ordonné fini et non vide possède au moins un élément minimal.
- 4°) Dans un ensemble ordonné quelconque, si A et B sont deux parties possédant des bornes supérieures et si $A \subset B$, comparez $\sup A$ et $\sup B$. Démontrez-le.
- 5°) Si S et T sont deux parties non vides majorées de \mathbb{R} , montrer que $\sup(S + T) = \sup S + \sup T$.
- 6°) Soit A une partie de \mathbb{R} non vide et majorée. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers $\sup(A)$.
- 7°) Énoncer et démontrer la propriété définissant la division euclidienne dans \mathbb{N} (on pourra utiliser les règles usuelles de calculs dans \mathbb{Z}).
- 8°) Montrer que toute partie non vide de \mathbb{N} possède un minimum.
- 9°) Montrer que si R est une relation d'équivalence sur E alors E/R est une partition de E .
- 10°) Montrer que si \mathcal{P} est une partition de E , il y a unicité de la relation d'équivalence dont l'ensemble quotient est \mathcal{P} (on ne demande pas de prouver l'existence).
- 11°) Montrer que toute fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Thèmes de la semaine : Relations d'ordre et d'équivalence

1 Ensembles et formules propositionnelles

En révision dans le programme de la semaine précédente.

2 Relations binaires

2.1 Définition

Relations binaires réflexives, symétriques, antisymétriques, transitives.

2.2 Relations d'ordre

Éléments comparables.

Ordre partiel, ordre total.

Exemples : l'inclusion, la divisibilité dans \mathbb{N} , l'ordre lexicographique.

Majorants et minorants.

partie majorée, minorée, bornée.

Minimum et maximum d'une partie.

Un ensemble ordonné dont toute partie non vide possède un minimum est dit bien ordonné.

Bornes supérieure et inférieure d'une partie, lien avec les notions de maximum et minimum.

$B \subset A \implies \sup(B) \leq \sup(A)$, $B \subset A \implies \inf(B) \geq \inf(A)$.

Principe du passage à la borne supérieure (resp : inférieure) : $[\forall a \in A, a \leq e] \iff \sup(A) \leq e$.

Propriété de la borne supérieure dans \mathbb{R} .

Si A est une partie non vide majorée de \mathbb{R} , il existe $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sup(A)$.

Si A est une partie non vide minorée de \mathbb{R} , il existe $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \inf(A)$.

Si A est une partie non vide majorée de \mathbb{R} , alors

$s = \sup(A) \iff [\forall a \in A, a \leq s] \wedge [\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, s - \varepsilon < a]$.

Si A est une partie non vide minorée de \mathbb{R} , alors

$m = \inf(A) \iff [\forall a \in A, a \geq m] \wedge [\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, m + \varepsilon > a]$.

Élément minimal, élément maximal d'une partie.

2.3 L'ordre naturel des entiers

Toute partie non vide majorée de \mathbb{N} possède un maximum.

Division euclidienne dans \mathbb{N} .

Toute partie non vide de \mathbb{N} possède un minimum.

Principe de la "descente infinie" : pour montrer que " $\forall n \in \mathbb{N}, R(n)$ ", une alternative à la récurrence est de raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\neg[R(n)]$. Ainsi, l'ensemble $F = \{n \in \mathbb{N} / \neg R(n)\}$ possède un minimum n_0 . On aboutit parfois à une contradiction en construisant un entier vérifiant $m < n_0$ et $m \in F$.

2.4 Relations d'équivalence

Exemple canonique : Soit E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application.

En posant $[x R y \iff f(x) = f(y)]$, on définit une relation d'équivalence R sur E .

Définition. Classes d'équivalence, ensemble quotient E/R .

pour tout $x, y \in E$, $x R y \iff \bar{x} = \bar{y}$.

Définition. Une partition \mathcal{P} de E est une partie de $\mathcal{P}(E)$ telle que :

- pour tout $A, B \in \mathcal{P}$, $A \neq B \implies A \cap B = \emptyset$,
- pour tout $A \in \mathcal{P}$, $A \neq \emptyset$,
- et $\bigcup_{A \in \mathcal{P}} A = E$.

Théorème. Si R est une relation d'équivalence sur E , son ensemble quotient E/R est une partition de E . Réciproquement, si \mathcal{P} est une partition de E , il existe une unique relation d'équivalence R sur E telle que $\mathcal{P} = E/R$: Elle est définie par $\forall x, y \in E$, $[x R y \iff (\exists C \in \mathcal{P}, x, y \in C)]$.

3 Quelques techniques et conseils de démonstration

La structure d'une démonstration se construit avant tout en fonction de la structure de la propriété à démontrer.

Démontrer une disjonction.

Raisonner par disjonction de cas.

Résoudre une équation.

Démontrer une implication, contraposée, raisonnement par l'absurde.

Démontrer une équivalence, une série d'équivalences.

Pour montrer que $[\forall x \in E, P(x)]$, le plus souvent, on prend x quelconque dans E , en écrivant "soit $x \in E$ ", puis on démontre $P(x)$.

Pour montrer que $\neg(\forall x \in E, P(x))$, on peut rechercher un x dans E tel que $P(x)$ est fausse. Dans ce contexte, x est appelé un contre-exemple du prédicat $P(x)$.

Démonstration d'une propriété d'existence et unicité.

Raisonnement par analyse-synthèse.

Démonstrations par récurrence., récurrences double, forte, finie.

Prévision pour la semaine prochaine :

Arithmétique sur \mathbb{Z} .