

Feuille d'exercices 4. Corrigé de deux exercices.

Exercice 4.11 :

1°) Soit $X, Y, Z \in \mathcal{P}(E)$.

$E \in I(E)$ et $X \cap E = X \cap E$, donc $X\mathcal{R}X$.

On a clairement $X\mathcal{R}Y \iff Y\mathcal{R}X$.

Supposons que $X\mathcal{R}Y$ et que $Y\mathcal{R}Z$:

Il existe $F, G \in I(E)$ tels que $X \cap F = Y \cap F$ et $Y \cap G = Z \cap G$.

Alors $X \cap (F \cap G) = (X \cap F) \cap G = (Y \cap F) \cap G = (Y \cap G) \cap F = (Z \cap G) \cap F = Z \cap (F \cap G)$,
or, en notant \bar{A} le complémentaire dans E d'une partie A de E , on a $\overline{F \cap G} = \bar{F} \cup \bar{G}$.

$F, G \in I(E)$, donc \bar{F} et \bar{G} sont finies. On en déduit que $F \cap G \in I(E)$, donc que $X\mathcal{R}Z$.

Ceci prouve que \mathcal{R} est réflexive, symétrique et transitive, donc c'est une relation d'équivalence.

2°) Soit $X, Y \in \mathcal{P}(E)$.

◇ Supposons que $X\Delta Y$ est fini. Posons $F = \overline{X\Delta Y} : F \in I(E)$.

Soit $x \in X \cap F$. Alors $x \in X$ et $x \notin X\Delta Y$, donc $x \in X \cap Y$. Réciproquement, si $x \in X \cap Y$, alors $x \in X$ et $x \notin X\Delta Y$, donc $X \cap F = X \cap Y$. De même, $Y \cap F = Y \cap X$, donc $X \cap F = Y \cap F$, avec $F \in I(E)$. Ceci prouve que $X\mathcal{R}Y$.

◇ Réciproquement, supposons qu'il existe $F \in I(E)$ tel que $X \cap F = Y \cap F$.

Soit $x \in X\Delta Y$. Si $x \in F$, alors $x \in X \cap F$ ou bien $x \in Y \cap F$, donc $x \in X \cap Y$, ce qui est faux car $x \in X\Delta Y$. Ainsi, $X\Delta Y \subset \bar{F}$ ce qui prouve que $X\Delta Y$ est fini.

Exercice 4.13 :

Existence :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $R(n)$ l'assertion selon laquelle l'entier n admet une écriture factorielle.

Pour $n = 0$, on prend $p = 0$, en convenant qu'une somme vide est nulle.

Ceci montre $R(0)$.

Pour $n \geq 0$, on suppose $R(k)$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$. Montrons $R(n+1)$.

$\{m \in \mathbb{N}/m! \leq n+1\}$ est non vide et majoré par $n+1$, donc il admet un maximum noté p . Ainsi, $p! \leq n+1 < (p+1)!$.

$\{x \in \mathbb{N}^*/p!x \leq n+1\}$ est non vide et majoré par p , donc il admet un maximum noté x_p . Ainsi, $p!x_p \leq n+1 < p!(x_p+1)$.

Ainsi, $0 \leq n+1 - p!x_p < p! \leq n+1$. On peut donc utiliser $R(h)$ avec $h = n+1 - p!x_p$:

il existe $q \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_q \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq x_k \leq k$ et $x_q \neq 0$ tels que $h = \sum_{k=1}^q k!x_k$.

$q! \leq q!x_q \leq h < p!$, donc $q < p$. Or $n+1 = h + p!x_p$, d'où $R(n+1)$.

On a donc montré l'existence.

Unicité :

Lemme :

Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq x_k \leq k$, $\sum_{k=1}^p k!x_k \leq (p+1)! - 1$, avec égalité

lorsque pour tout k , $x_k = k$.

Démonstration du lemme : Par récurrence sur p : ok pour $p = 0$. On suppose le lemme

démontré pour $p \in \mathbb{N}$. Alors $\sum_{k=1}^{p+1} k!x_k \leq (p+1)! - 1 + (p+1)!(p+1) = (p+2)! - 1$.

De plus, lorsque pour tout k , $x_k = k$,

alors $\sum_{k=1}^{p+1} k!x_k = (p+1)! - 1 + (p+1)!(p+1) = (p+2)! - 1$.

On a bien montré $R(p+1)$.

Première méthode : Une démonstration directe :

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que n possède deux écritures factorielles :

$$n = \sum_{k=1}^p x_k k! = \sum_{h=1}^q h! y_h.$$

Si $q < p$, alors d'après le lemme, $n = \sum_{h=1}^q h! y_h < (q+1)! \leq p! \leq n$, ce qui est faux. On

raisonne de même si $p < q$, donc $p = q$.

Si maintenant $x_p < y_p$, alors $n = \sum_{k=1}^p x_k k! < p! + p!x_p = p!(x_p + 1) \leq p!y_p \leq n$, ce qui

est faux, donc $x_p = y_p$, puis on conclut en inscrivant ceci dans le cadre d'une récurrence forte sur n .

Seconde méthode : Par un argument combinatoire : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons

$$A_n = \{(x_1, \dots, x_p) / 1 \leq p < n, \forall k \in \{1, \dots, p\}, 0 \leq x_k \leq k, x_p \neq 0\}$$

$$\varphi_n : A_n \longrightarrow \llbracket 1, n! - 1 \rrbracket$$

et $(x_1, \dots, x_p) \longmapsto \sum_{k=1}^p k!x_k$.

φ_n est bien à valeurs dans $\llbracket 1, n! - 1 \rrbracket$ d'après le lemme, elle est surjective d'après la démonstration de l'existence. L'unicité correspond à l'injectivité de φ_n , ce que l'on peut démontrer en prouvant que $\#A_n = \#\llbracket 1, n! - 1 \rrbracket = n! - 1$.

Or $\#A_n = \sum_{p=1}^{n-1} p!p = n! - 1$ d'après le cas d'égalité du lemme.