DS 2

Les calculatrices sont interdites.

Exercices

Exercice 1 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $(E) \;:\; \sqrt{(x-1)(x+2)} \geq 2x+2$.

Exercice 2 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $(E) \;:\; (1+i)z^2 + (1-i)z + 6(1+i) = 0$.

Exercice 3 :

Simplifier l'expression $\sin(2\arcsin x)$.

Exercice 4 :

Calculer $\displaystyle\int x^5 e^{-x^3}\, dx$.

Exercice 5 :

Calculer $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{1+\tan^2 x}}{\tan^2 x}\, dx$.

Problème : Loi 0-1 de Kolmogorov

Dans tout le problème, on fixe un ensemble Ω.
On notera $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω.
Si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on notera $\overline{A} = \Omega \setminus A$ le complémentaire de A.

Partie I : Tribus et probabilités

Soit $\mathcal{F}$ un ensemble de parties de Ω, c'est-à-dire que $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$.
On dit que $\mathcal{F}$ est une tribu de Ω si et seulement si

- $\Omega \in \mathcal{F}$;
- $\mathcal{F}$ est stable par passage au complémentaire : pour tout $F \in \mathcal{F}$, $\overline{F} \in \mathcal{F}$;
- $\mathcal{F}$ est stable par réunion dénombrable : pour toute suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{F}$, $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \in \mathcal{F}$.

1°) Déterminer la plus grande et la plus petite tribu de Ω, au sens de l'inclusion.

2°) Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Déterminer la plus petite tribu contenant A.

3°) Soit $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω.
Montrer que si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{F}$, alors $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \in \mathcal{F}$.

Montrer que si $n \in \mathbb{N}$ et si $F_0, \ldots, F_n$ sont $n+1$ éléments de $\mathcal{F}$, alors $F_0 \cup \cdots \cup F_n$ et $F_0 \cap \cdots \cap F_n$ sont dans $\mathcal{F}$.

Lorsque $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels, on dit que "la série $\sum p_n$ est convergente" si et seulement si la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{n} p_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel, auquel cas ce réel est noté $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n$.

4°) Lorsque $a \in]-1, 1[$, calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$.

5°) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Montrer que la série $\sum(a_{n+1} - a_n)$ est convergente si et seulement si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et dans ce cas, donner une expression simple de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(a_{n+1} - a_n)$.

Lorsque $\mathcal{F}$ est une tribu sur Ω, on dit que P est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ si et seulement si P est une application de $\mathcal{F}$ dans $[0,1]$ telle que :

— $P(\Omega) = 1$;

— pour toute suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{F}$, si ces éléments sont deux à deux disjoints, c'est-à-dire si $[\forall n, m \in \mathbb{N}, [\ n \neq m \Longrightarrow F_n \cap F_m = \emptyset]]$, alors $\sum P(F_n)$ est une série convergente et $P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(F_n)$.

6°) On suppose que $\mathcal{F}$ est une tribu sur Ω et que P est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.
Montrer que $P(\emptyset) = 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $F_0, \ldots, F_n$ sont des éléments de $\mathcal{F}$ deux à deux disjoints, montrer que $P\Big(\bigcup_{k=0}^{n} F_k\Big) = \sum_{k=0}^{n} P(F_k)$.
Pour tout $F \in \mathcal{F}$, montrer que $P(\overline{F}) = 1 - P(F)$.
Pour tout $G, H \in \mathcal{F}$ avec $G \subset H$, montrer que $P(H \setminus G) = P(H) - P(G)$.

7°) Soit I un ensemble non vide et $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ une famille de tribus sur Ω.
Montrer que $\bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$ est aussi une tribu sur Ω.

8°) Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ (c'est-à-dire que $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$).
Montrer qu'on peut définir la plus petite tribu contenant $\mathcal{A}$.

Pour la suite de ce problème, on notera $\sigma(\mathcal{A})$ la plus petite tribu contenant $\mathcal{A}$, que l'on appellera également la tribu engendrée par $\mathcal{A}$.

9°) On suppose que $\mathcal{F}$ est une tribu sur Ω et que P est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.
Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}$.
Lorsque la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, c'est-à-dire lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n \subset F_{n+1}$, montrer que $P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} P(F_n)$.
Lorsque la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, montrer que $P\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} P(F_n)$.

Partie II : lemme des classes monotones

Si $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, on dit que $\mathcal{M}$ est une classe monotone si et seulement si

— $\Omega \in \mathcal{M}$;

— $\mathcal{M}$ est stable par différence : pour tout $A, B \in \mathcal{M}$ avec $A \subset B$, $B \setminus A \in \mathcal{M}$;

— $\mathcal{M}$ est stable par réunion dénombrable croissante : pour toute suite **croissante** $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.

10°) Montrer que toute tribu de Ω est une classe monotone.

11°) Soit $\mathcal{M}$ une classe monotone. On suppose de plus que $\mathcal{M}$ est stable par intersection finie, c'est-à-dire que, pour tout $A, B \in \mathcal{M}$, $A \cap B \in \mathcal{M}$.
Montrer que $\mathcal{M}$ est une tribu.

12°) Lorsque $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, montrer que l'on peut définir la plus petite classe monotone contenant $\mathcal{A}$, qui pour la suite de ce problème, sera notée $m(\mathcal{A})$.

Lorsque $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, on dit que $\mathcal{A}$ est un π-système si et seulement si il est stable par intersection finie, c'est-à-dire si et seulement si, pour tout $A, B \in \mathcal{A}$, $A \cap B \in \mathcal{A}$.

13°) Lorsque $\Omega = \mathbb{R}$, montrer que $\{]-\infty, t] \ / \ t \in \mathbb{R}\}$ est un π-système.

Pour toute la suite de cette partie, on suppose que $\mathcal{A}$ est un π-système et l'on souhaite montrer que $m(\mathcal{A})$ est égal à $\sigma(\mathcal{A})$ (définie en question 8). Ce résultat s'appelle le lemme des classes monotones.

14°) Soit $A \in \mathcal{A}$. Notons $\mathcal{M} = \{B \in m(\mathcal{A}) \ / \ A \cap B \in m(\mathcal{A})\}$.
Montrer que $\mathcal{M}$ est une classe monotone.
En déduire que $\mathcal{M} = m(\mathcal{A})$.

15°) Conclure.

Partie III : indépendance

Pour toute la suite du problème, on fixe une tribu $\mathcal{F}$ sur Ω
et une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{F})$.
Lorsque $A, B \in \mathcal{F}$, on dit que A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

16°) Soit G et H deux éléments de $\mathcal{F}$ que l'on suppose indépendants.
Montrer que $\overline{G}$ et H sont indépendants.

Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux tribus incluses dans $\mathcal{F}$, on dit qu'elles sont indépendantes si et seulement si, pour tout $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$, A et B sont indépendants.

17°) Soit $A, B \in \mathcal{F}$. Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si les tribus $\sigma(\{A\})$ et $\sigma(\{B\})$ sont indépendantes.

Si I est un ensemble non vide quelconque et si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{F}$, on dit que c'est une famille mutuellement indépendante si et seulement si, pour toute partie finie non vide J incluse dans I, $P\Big(\bigcap_{i \in J} A_i\Big) = \prod_{i \in J} P(A_i)$.

Si maintenant $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ est une famille de parties de $\mathcal{F}$, on dit que c'est une famille mutuellement indépendante si et seulement si, pour toute partie finie non vide J incluse dans I, pour toute famille $(A_i)_{i \in J}$ telle que, pour tout $i \in J$, $A_i \in \mathcal{A}_i$,
$P\Big(\bigcap_{i \in J} A_i\Big) = \prod_{i \in J} P(A_i)$.

18°) On suppose que $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont deux parties de $\mathcal{F}$.
Pour tout $B \in \mathcal{A}_2$, montrer que $\{A \in \sigma(\mathcal{A}_1) \ / \ P(A \cap B) = P(A)P(B)\}$ est une classe monotone.

19°) On suppose que $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont deux parties de $\mathcal{F}$ et que ce sont des π-systèmes.
On suppose que la famille $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ est mutuellement indépendante.
Montrer que la famille $(\sigma(\mathcal{A}_1), \sigma(\mathcal{A}_2))$ est mutuellement indépendante.

20°) Soit I un ensemble non vide quelconque et soit $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ une famille mutuellement indépendante de parties de $\mathcal{F}$. On suppose que pour tout $i \in I$, $\mathcal{A}_i$ est un π-système.
Montrer que la famille $(\sigma(\mathcal{A}_i))_{i\in I}$ est mutuellement indépendante.

Partie IV : Loi 0-1 de Kolmogorov

Dans cette partie, $(\mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de tribus incluses dans $\mathcal{F}$ que l'on suppose mutuellement indépendante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{B}_n = \sigma\Big(\bigcup_{k=n}^{+\infty} \mathcal{T}_k\Big)$ et on pose $\mathcal{B}_\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$.

21°) On suppose que $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $G_n \in \mathcal{T}_n$. On pose $H = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Big(\bigcup_{k=n}^{+\infty} G_k\Big)$. Montrer que $H \in \mathcal{B}_\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{C}_n = \sigma\Big(\bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{T}_k\Big)$.

22°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que la famille $(\mathcal{C}_n, \mathcal{B}_{n+1})$ est mutuellement indépendante.

23°) Montrer que la famille $(\mathcal{B}_\infty, \mathcal{B}_\infty)$ est mutuellement indépendante.
En déduire que, pour tout $H \in \mathcal{B}_\infty$, $P(H) \in \{0, 1\}$.

24°)
On suppose que $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite mutuellement indépendante d'éléments de $\mathcal{F}$.
On pose $H = \{x \in \Omega \ / \ \{n \in \mathbb{N} \ / \ x \in G_n\} \text{ est infini}\}$.
Montrer que $P(H) \in \{0, 1\}$, ce qui signifie que la probabilité que G_n se réalise une infinité de fois est égale à 0 ou à 1.