DM 7

Problème 1 : Nombres parfaits pairs

On dit qu'un entier naturel n est parfait lorsque la somme de ses diviseurs dans $\mathbb{N}$ est égale à $2n$.

1°) Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 2$ et $2^k - 1$ est un nombre premier.
Montrer que $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ est un nombre parfait pair.

On souhaite maintenant démontrer la réciproque : on suppose que n est un entier naturel parfait et pair.

2°) Montrer qu'il existe $k \geq 2$ et m impair tel que $n = 2^{k-1}m$.
En notant $S(n)$ la somme des diviseurs dans $\mathbb{N}$ de n et $S(m)$ la somme des diviseurs de m dans $\mathbb{N}$, montrer que $S(n) = S(m)(2^k - 1)$.

3°) Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{N}^*$ tel que $m = M(2^k - 1)$.

4°) Exprimer $1 + m + M$ en fonction de $S(m)$.
En déduire qu'un entier naturel est parfait et pair si et seulement si il est de la forme $2^{k-1}(2^k - 1)$ avec $k \geq 2$ et $2^k - 1$ premier.

Problème 2 : confluence

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{N}_n = \{1, \ldots, n\}$, en convenant que $\mathbb{N}_0 = \emptyset$.
Soit E un ensemble muni d'une relation binaire notée $\longrightarrow$.

Pour tout $x, y \in E$, on note $x \longrightarrow^* y$ si et seulement si il existe $p \in \mathbb{N}$ et $x_0, \ldots, x_p \in E$ tels que $x_0 = x$, $x_p = y$ et, pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $x_{i-1} \longrightarrow x_i$.

1°) Lorsque la relation $\longrightarrow$ est symétrique, montrer que $\longrightarrow^*$ est une relation d'équivalence.

2°) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour cette question seulement, on suppose que $E = \mathbb{Z}$ et que, pour tout $x, y \in \mathbb{Z}$, $x \longrightarrow y \iff |y - x| = p$. Quelle est alors la relation $\longrightarrow^*$?

3°) Montrer qu'on ne modifie pas $\longrightarrow^*$ si l'on remplace la relation $\longrightarrow$ par la relation $\longrightarrow^+$ définie par : pour tout $x, y \in E$, $x \longrightarrow^+ y \iff (x \longrightarrow y \ \wedge \ x \neq y)$.

4°) À quelle condition nécessaire et suffisante la relation $\longrightarrow^*$ est-elle une relation d'ordre ?

5°) On dit que la relation $\longrightarrow$ est localement confluente lorsque, pour tout $x, y_1, y_2 \in E$ tels que $x \longrightarrow y_1$ et $x \longrightarrow y_2$, il existe $z \in E$ tel que $y_1 \longrightarrow^* z$ et $y_2 \longrightarrow^* z$.
On dit que la relation $\longrightarrow$ est confluente lorsque, pour tout $x, y_1, y_2 \in E$ tels que $x \longrightarrow^* y_1$ et $x \longrightarrow^* y_2$, il existe $z \in E$ tel que $y_1 \longrightarrow^* z$ et $y_2 \longrightarrow^* z$.
Montrer que si $\longrightarrow$ est confluente, alors elle est localement confluente, mais que la réciproque est fausse.

Pour la fin de ce problème, on suppose que la relation $\longrightarrow$ est noethérienne, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \longrightarrow x_{n+1}$.

6°) Pour tout $x, y \in E$, on note $x \leq y$ si et seulement si $y \longrightarrow^* x$.
Montrer que $\leq$ est un ordre sur E.
Montrer que toute partie non vide de E possède un élément minimal.
Est-ce que toute partie non vide de E possède un minimum ?

7°) Soit P un prédicat défini sur E tel que

$$\forall x \in E,\ \ [\forall y \in E,\ \ (x \longrightarrow y \Longrightarrow P(y))] \Longrightarrow P(x).$$

Montrer que $P(x)$ est vrai pour tout $x \in E$.

8°) On suppose que la relation $\longrightarrow$ est localement confluente.
Montrer que $\longrightarrow$ est confluente.

Problème 3 : Les valeurs absolues de $\mathbb{Q}$

Lorsque V est une application de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on dit que V est une valeur absolue sur $\mathbb{Q}$ si et seulement si
— $\forall x \in \mathbb{Q},\ \ V(x) \geq 0$ (propriété de positivité) ;
— $\forall x \in \mathbb{Q},\ \ V(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ (propriété de séparation) ;
— $\forall x, y \in \mathbb{Q},\ \ V(xy) = V(x)V(y)$ (multiplicativité).
— $\forall x, y \in \mathbb{Q},\ \ V(x + y) \leq V(x) + V(y)$ (inégalité triangulaire).

1°) On pose $V_0(0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{Q}^*$, $V_0(x) = 1$.
Montrer que V_0 est une valeur absolue sur $\mathbb{Q}$. C'est la valeur absolue triviale sur $\mathbb{Q}$.

2°) Soit V une valeur absolue sur $\mathbb{Q}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
— pour tout $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Q}$, $V(x_1 \times \cdots \times x_n) = V(x_1) \times \cdots \times V(x_n)$;
— pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $V(x^n) = V(x)^n$;
— pour tout $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Q}$, $V(x_1 + \cdots + x_n) \leq V(x_1) + \cdots + V(x_n)$.

3°) Soit V une valeur absolue sur $\mathbb{Q}$. Montrer que
— $V(1) = 1$;
— $\forall x \in \mathbb{Q},\ \ V(-x) = V(x)$;
— $\forall x \in \mathbb{Q}^*,\ \ V\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{V(x)}$.

Pour toute la suite de ce problème, on considère une valeur absolue V sur $\mathbb{Q}$.
On suppose que V n'est pas la valeur absolue triviale.

4°) Soit p un nombre premier.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $v_p(n)$ la valuation p-adique de n, c'est-à-dire le plus grand entier naturel k tel que p^k divise n.
Lorsque $n \in \mathbb{Z}^*$, on convient que $v_p(n) = v_p(|n|)$.
Montrer qu'on peut poser, pour tout $a \in \mathbb{Z}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$, $v_p\left(\frac{a}{b}\right) = v_p(a) - v_p(b)$.
On prolonge ainsi la valuation p-adique sur $\mathbb{Q}^*$.
Montrer que, pour tout $r, s \in \mathbb{Q}^*$, $v_p(rs) = v_p(r) + v_p(s)$.
Montrer que, pour tout $r, s \in \mathbb{Q}^*$ tels que $r + s \neq 0$, $v_p(r+s) \geq \min(v_p(r), v_p(s))$, avec égalité lorsque $v_p(r) \neq v_p(s)$.

5°) Soit p un nombre premier.
On note $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $|0|_p = 0$ et $\forall r \in \mathbb{Q}^*,\ |r|_p = p^{-v_p(r)}$.
Vérifier que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, l'application $(|\cdot|_p)^\alpha$ est une valeur absolue sur $\mathbb{Q}$.

6°) On suppose pour cette question que $\forall n \in \mathbb{N}$, $V(n) \leq 1$.
a) Démontrer qu'il existe un nombre premier p tel que $V(p) < 1$.
b) Soit q un nombre premier distinct de p. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $V(p)^k + V(q)^k \geq 1$ et en déduire que $V(q) = 1$.
c) Justifier l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $V = (|\cdot|_p)^\alpha$.

7°) On note $|\cdot|$ la valeur absolue classique sur $\mathbb{Q}$ définie par $\forall r \in \mathbb{Q},\ |r| = \max\{-r, r\}$.
Vérifier que, pour tout $\alpha \in]0,1]$, l'application $|\cdot|^\alpha$ est une valeur absolue sur $\mathbb{Q}$.

8°) Soient $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. On pose $\log_b a = \dfrac{\ln a}{\ln b}$.
a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la décomposition de a^k en base b s'écrit $a^k = \displaystyle\sum_{j=0}^{\lfloor k \log_b a \rfloor} b_{k,j}\, b^j$,
où pour tout $j \in \mathbb{N}$, $b_{k,j} = \lfloor a^k b^{-j} \rfloor - b \lfloor a^k b^{-j-1} \rfloor$.
b) On pose $M_b = \max\{V(0), V(1), \ldots, V(b-1)\}$.
Démontrer que si $V(b) \leq 1$, on a $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ V(a)^k \leq M_b\,(1 + k \log_b a)$
et que si $V(b) > 1$, on a $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ V(a)^k \leq \dfrac{M_b\, V(b)}{V(b) - 1}\, V(b)^{k \log_b a}$.

9°) On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ tel que $V(n_0) > 1$.
a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ V(n) > 1$.
b) Pour tout $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, montrer que $V(n)^{\frac{1}{\ln n}} \leq V(m)^{\frac{1}{\ln m}}$,
puis que $V(n)^{\frac{1}{\ln n}} = V(m)^{\frac{1}{\ln m}}$.
c) Justifier l'existence de $\alpha \in]0,1]$ tel que $V = |\cdot|^\alpha$.

10°) Énoncer le théorème que démontre ce problème.