

## Feuille d'exercices 6: Les réels.

**Exercice 6.1 :** (niveau 1)

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\lfloor 2x + 1 \rfloor = \lfloor x + 4 \rfloor$ .

**Exercice 6.2 :** (niveau 1)

Montrer que  $\frac{\ln 2 + \ln 3}{\ln 5 + \ln 7}$  est irrationnel.

**Exercice 6.3 :** (niveau 1)

1°) Démontrer que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel.

2°) Démontrer que la racine carrée d'un irrationnel strictement positif est un irrationnel.

3°) Soient  $r, s$  deux rationnels positifs tels que  $\sqrt{r}$  et  $\sqrt{s}$  sont irrationnels. Démontrer que  $\sqrt{r} + \sqrt{s}$  est irrationnel.

**Exercice 6.4 :** (niveau 1)

Soit  $f$  une application continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $f|_{\mathbb{Q}}$  est croissante.

Montrer que  $f$  est croissante.

**Exercice 6.5 :** (niveau 1)

On appelle nombre dyadique tout nombre rationnel de la forme  $\frac{m}{2^k}$  où  $m \in \mathbb{Z}$  et  $k \in \mathbb{N}$ .  
Montrer que l'ensemble des nombres dyadiques est dense dans  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 6.6 :** (niveau 2)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $\lfloor nx \rfloor = \sum_{k=0}^{n-1} \lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor$ .

**Exercice 6.7 :** (niveau 2)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+3} \rfloor$ .

**Exercice 6.8 :** (niveau 2)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On pose  $F_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$ .  $F_n$  peut-il être un nombre décimal ?

**Exercice 6.9 :** (niveau 2)

Montrer que  $\{\sqrt{m} - \sqrt{n} / (n, m) \in \mathbb{N}^2\}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 6.10 :** (niveau 2)

1°) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $a_n, b_n \in \mathbb{N}$  tels que  $(3+2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ .

2°) Montrer que  $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 / x^2 - 2y^2 = 1\}$  est infini.

---

**Exercice 6.11 :** (niveau 2)

Calculer la borne supérieure de  $E = \{\sqrt{k} - \lfloor \sqrt{k} \rfloor / k \in \mathbb{N}^*\}$ .

**Exercice 6.12 :** (niveau 2)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(I_j)_{1 \leq j \leq n}$  une famille finie de  $n$  intervalles telle que  $\bigcup_{1 \leq j \leq n} I_j$  est un

intervalle. Montrer qu'il existe  $\ell \in \mathbb{N}_n$  tel que  $\bigcup_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq \ell}} I_j$  est un intervalle.

Cette propriété est-elle encore vraie avec une famille infinie d'intervalles ?

**Exercice 6.13 :** (niveau 3)

Soit  $A$  une partie non majorée de  $\mathbb{R}_+$ . Montrer que  $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n} A$  est dense dans  $\mathbb{R}_+$ .

---

## Exercices supplémentaires

**Exercice 6.14 :** (niveau 1)

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\lfloor \sqrt{x^2 + 1} \rfloor = 2$ .

**Exercice 6.15 :** (niveau 1)

Démontrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2, (1 + \sqrt{5})^n = a_n + b_n\sqrt{5}$ .

**Exercice 6.16 :** (niveau 1)

Démontrer que lorsqu'un nombre réel peut être écrit sous la forme  $a + b\sqrt{2}$  avec  $a, b \in \mathbb{Z}$ , alors cette écriture est unique.

**Exercice 6.17 :** (niveau 1)

Montrer que  $\{q^2/q \in \mathbb{Q}\}$  est dense dans  $\mathbb{R}_+$ .

**Exercice 6.18 :** (niveau 1)

Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  que l'on suppose  $T$ -périodique, avec  $T > 0$ .

On suppose également qu'il existe  $\ell \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$ .

Montrer que  $f$  est constante.

**Exercice 6.19 :** (niveau 2)

Montrer que  $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4$ .

**Exercice 6.20 :** (niveau 2)

Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . Déterminer si elle existe la limite de la suite  $(E(a^n)^{\frac{1}{n}})_{n \in \mathbb{N}^*}$ , où  $E$  désigne la partie entière.

**Exercice 6.21 :** (niveau 2)

Démontrer qu'il existe deux irrationnels  $a$  et  $b$  tels que  $a^b$  est un rationnel.

**Exercice 6.22 :** (niveau 2)

1°) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $(I_k)_{0 \leq k \leq n}$  une famille d'intervalles non vides telle que, pour tout  $k \in \mathbb{N}_n$ , il existe  $h \in \mathbb{N}$  tel que  $h < k$  et  $I_k \cap I_h \neq \emptyset$ .

Montrer que  $\bigcup_{0 \leq k \leq n} I_k$  est un intervalle.

2°) Soit  $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une famille d'intervalles non vides telle que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , il existe  $h \in \mathbb{N}$  tel que  $h < k$  et  $I_k \cap I_h \neq \emptyset$ .

Montrer que  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$  est un intervalle.

3°) La propriété précédente est-elle encore vraie si l'on remplace  $\mathbb{N}$  par  $\mathbb{Z}$ ?

**Exercice 6.23 :** (niveau 2)

On fixe  $k$  dans  $\mathbb{N}^*$ . Lorsque  $n \in \mathbb{N}$  avec  $n \geq k$ , on note  $u_n$  le chiffre des unités de  $\binom{n}{k}$  en base 10. Montrer que le réel  $x = 0, u_k u_{k+1} u_{k+2} \dots$  est un rationnel (formellement,

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_{k+n-1}}{10^n}).$$

---

**Exercice 6.24 :** (niveau 2)

Pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , montrer que  $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$ .

**Exercice 6.25 :** (niveau 3)

Soient  $a, b, c$  trois nombres réels positifs ou nuls. Démontrer que l'un au moins des trois nombres réels  $4b(1 - c)$ ,  $4c(1 - a)$  et  $4a(1 - b)$  est inférieur ou égal à 1.

**Exercice 6.26 :** (niveau 3)

Montrer que  $\{\cos(\ln(n)) / n \in \mathbb{N} \text{ avec } n \geq 2\}$  est dense dans  $[-1, 1]$ .