Feuille d'exercices 7.
Applications et lois internes.

Exercice 7.1 : (niveau 1)
Calculer $f([-1,1]^2)$, $f(\mathbb{R}_+ \times [1,+\infty[)$, $f^{-1}(\{4\})$ et $f^{-1}(]-\infty,1])$ pour les fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ suivantes : $f(x,y) = x^2 + y^2$ et $f(x,y) = x + y$.

Exercice 7.2 : (niveau 1)
Soit f une application de E dans F et soit F' une partie de F.
Exprimer $f(f^{-1}(F'))$ en fonction de F' et de $f(E)$.

Exercice 7.3 : (niveau 1)
Soit G un groupe tel que $\forall g \in G,\ \ g^2 = 1_G$. Montrer que G est abélien.

Exercice 7.4 : (niveau 1)
Soit $f\ :\ E \longrightarrow F$, $g\ :\ F \longrightarrow G$ et $h\ :\ G \longrightarrow E$ des applications.
On suppose que, parmi les 3 applications hgf, gfh et fhg, 2 sont injectives (resp : surjectives) et que la troisième est surjective (resp : injective). Montrer que f, g et h sont des bijections.

Exercice 7.5 : (niveau 1)
Soit $(E,*)$ un magma. On dit que $x \in E$ est idempotent si et seulement si $x * x = x$.

1°) On suppose que tout élément de E est régulier et que $*$ est distributive par rapport à elle-même. Montrer que tout élément est idempotent.

2°) On suppose que tout élément de E est régulier et que $*$ est associative. Montrer que E possède au plus un élément idempotent.

Exercice 7.6 : (niveau 1)
Soit E un ensemble et A une partie de E.

1°) On note $\begin{array}{cccc} f: & \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ & X & \longmapsto & X \cup A \end{array}$.
À quelle condition f est-elle injective (resp : surjective) ?

2°) On note $\begin{array}{cccc} f: & \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ & X & \longmapsto & X \cap A \end{array}$.
À quelle condition f est-elle injective (resp : surjective) ?

Exercice 7.7 : (niveau 2)

Démontrer que tout groupe fini $(G, .)$ de cardinal pair contient au moins un élément g_0 différent de 1_G tel que $g_0^2 = 1_G$.

Exercice 7.8 : (niveau 2)

Soient E un ensemble et $p : E \longrightarrow E$ une application telle que $p \circ p \circ p = p$.

1°) Démontrer que p est injective si et seulement si p est surjective.

2°) Démontrer que si p est injective ou surjective alors $p \circ p = Id_E$.

Exercice 7.9 : (niveau 2)

Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Montrez que les assertions suivantes sont équivalentes (où $\mathcal{P}(F)$ désigne l'ensemble des parties de F) :
i) f est surjective ;
ii) $\forall y \in F \quad f(f^{-1}\{y\}) = \{y\}$;
iii) $\forall Y \in \mathcal{P}(F) \quad f(f^{-1}(Y)) = Y$;
iv) $\forall Y \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(Y) = \emptyset \Longleftrightarrow Y = \emptyset$.
Donnez un énoncé analogue en remplaçant i) par i') : f injective.

Exercice 7.10 : (niveau 2)

Soit $(M, .)$ un monoïde. Soit $a, b \in M$ tels que a et b commutent.
On suppose que a n'est pas inversible. Montrer que ab n'est pas inversible.

Exercice 7.11 : (niveau 2)

Soit E muni d'une loi interne notée ".", associative, telle qu'il existe e vérifiant :
i) $\forall x \in E \quad xe = x$. ($e$ est neutre à droite).
ii) $\forall x \in E, \exists y \in E \; xy = e$. (tout élément admet un symétrique à droite).
Montrez que E est un groupe.

Exercice 7.12 : (niveau 2)

Etudier l'injectivité et la surjectivité de l'application f, de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{Q}$, définie par $f(p, q) = p + \frac{1}{q}$.

Exercice 7.13 : (niveau 2)

Soit A, B, C, D des ensembles. Construire une bijection entre $C^{A \times B}$ et $(C^A)^B$ et une injection de $C^A \times D^B$ dans $(C \times D)^{A \times B}$.

Exercice 7.14 : (niveau 2)

Soit $f : E \longrightarrow F$. On note $\hat{f}$ l'application "image directe" de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(F)$, et $\widehat{f^{-1}}$ l'application " image réciproque" de $\mathcal{P}(F)$ dans $\mathcal{P}(E)$.

1°) Montrer que f est injective si et seulement si $\hat{f}$ est injective (resp : $\widehat{f^{-1}}$ est surjective).

2°) Montrer que f est surjective si et seulement si $\hat{f}$ est surjective (resp : $\widehat{f^{-1}}$ est injective).

Exercice 7.15 : (niveau 2)

1°) Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{C}$ avec $|r| < 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$.

2°) Dans un anneau A quelconque, si $a, b \in A$ sont tels que $1 - ab$ est inversible, montrer que $1 - ba$ est aussi inversible.

Exercice 7.16 : (niveau 3)

Soient A et B deux parties non vides d'un ensemble E et f l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ définie par $f(X) = (A \cap X, B \cap X)$.

1°) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit injective.

2°) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit surjective.

3°) Lorsque f est une bijection, déterminer f^{-1}.

Exercice 7.17 : (niveau 3)

Soit E, F et G trois ensembles.
Soit f une application de F dans G et g une application de E dans G.

1°) Donnez une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une application h telle que $g = f \circ h$.

2°) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que h soit unique.

3°) Mêmes questions en supposant maintenant que f est une application de E dans F et en étudiant la condition d'existence de h tel que $g = h \circ f$.

Exercice 7.18 : (niveau 3)

Soit E, F, G et H quatre ensembles, $s : E \longrightarrow F$, $f : E \longrightarrow G$, $i : G \longrightarrow H$ et $g : F \longrightarrow H$ des applications telles que s est surjective, i est injective, et $i \circ f = g \circ s$. Montrer qu'il existe une unique application $h : F \longrightarrow G$ telle que $f = h \circ s$ et $g = i \circ h$.

Exercices supplémentaires :

Exercice 7.19 : (niveau 1)

Soit $f\ :\ E \longrightarrow E$ une application. On note $F = \{x \in E / f(x) = x\}$. F est l'ensemble des points fixes de f. Montrer que $f \circ f = f$ si et seulement si $f(E) \subset F$.

Exercice 7.20 : (niveau 1)

Soient $f\ :\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $g\ :\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
par $f(x) = 2x$ et $g(x) = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$.

1°) a) Démontrer que f est injective et non surjective.
b) Pour tout $y \in \mathbb{N}$, résoudre l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{N}$. Retrouver ainsi le fait que f est injective et non surjective.

2°) Étudier l'injectivité et la surjectivité de g.

3°) Préciser $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 7.21 : (niveau 1)

Déterminer $f(\mathbb{R}_+)$, $f(\mathbb{R}_-^*)$, $f(]0, 1])$, $f^{-1}(\mathbb{R}_+)$ et $f^{-1}(\{-1\})$ lorsque f prend les valeurs suivantes : $f(x) = e^x$, $f(x) = \ln x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

Exercice 7.22 : (niveau 1)

1°) Soit A et B deux parties d'un ensemble E. Calculer l'indicatrice de $A\Delta B$ en fonction des indicatrices 1_A et 1_B de A, B.

2°) Soit A, B, C trois parties d'un ensemble E et D la partie des éléments appartenant exactement à deux des parties A, B, C. Calculer l'indicatrice 1_D en fonction des indicatrices 1_A, 1_B et 1_C de A, B, C.

Exercice 7.23 : (niveau 1)

Soit E un ensemble muni de deux lois internes $+$ et $.$, admettant chacune un élément neutre (respectivement noté e et u), et telles que chacune d'elles soit distributive par rapport à l'autre.
a) Montrez en calculant $e.(u + e)$ que $e^2 = e$, et de façon analogue que $u + u = u$.
b) Prouvez que ces deux lois sont idempotentes.

Exercice 7.24 : (niveau 2)

Sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E, on considère la loi suivante :

$$A \top B = (A \cup (E \setminus B)) \cap (B \cup (E \setminus A)).$$

Montrez que $(\mathcal{P}(E), \top)$ est un groupe abélien

Exercice 7.25 : (niveau 2)

Soit E un ensemble. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.
Si A est une partie de E, on notera $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E.
Sur $\mathcal{P}(E)$, on considère les lois suivantes :

$$\begin{aligned} A+B &= (A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A}) \quad \text{et} \\ A.B &= A\cap B. \end{aligned}$$

Montrez que $(\mathcal{P}(E),+,.)$ est un anneau abélien. Est-il intègre ?

Exercice 7.26 : (niveau 2)

Soient E,F deux ensembles et $f\ :\ E\longrightarrow F$ une application.
On dit qu'une partie A de E est un domaine d'injectivité pour f lorsque la restriction de f à A (au départ) est une injection. Ce domaine est dit maximal lorsqu'il n'existe pas de partie B de E, autre que A, telle que $A\subset B$ et la restriction de f à B est injective.
Soit A un domaine d'injectivité de f. Démontrer que ce domaine est maximal si et seulement si $f(A)=f(E)$.

Exercice 7.27 : (niveau 2)

Soit $(G,.)$ un groupe et $a,b\in G$ tels que $aba=b^3$ et $b^5=1_G$.
Montrer que a et b commutent.

Exercice 7.28 : (niveau 2)

On munit un ensemble E d'une loi de composition interne associative notée $*$.
On suppose qu'il existe $a\in E$ tel que l'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & a*x*a \end{array}$ est surjective.
Montrer l'existence d'un élément neutre et l'inversibilité de a.

Exercice 7.29 : (niveau 2)

Soit E un ensemble non vide et $A,B\in\mathcal{P}(E)$. On note f l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)^2$ définie par $f(X)=(X\cup A,X\cup B)$.

1°) Montrer que f n'est pas surjective.

2°) Donner une CNS pour que f soit injective.

Exercice 7.30 : (niveau 2)

Soient E,F deux ensembles et $f\ :\ E\longrightarrow F$ une application.

1°) Démontrer que pour tout $A,B\in\mathcal{P}(E)$, $f(A\setminus B)\supset f(A)\setminus f(B)$.

2°) Démontrer que f est injective si et seulement si pour tout $A,B\in\mathcal{P}(E)$,
$f(A\setminus B)=f(A)\setminus f(B)$.

Exercice 7.31 : (niveau 2)

Soient $(A,+,\times)$ un anneau et $a\in A$. On suppose que a admet un unique inverse à droite (c'est-à-dire $\exists!b\in A,\ \ ab=1$). Démontrer que a est simplifiable et en déduire que a est inversible.

Exercice 7.32 : (niveau 2)

Construire une surjection de $\mathbb{N}$ sur lui-même pour laquelle chaque entier possède exactement p antécédents ($p\geq 1$ étant fixé). En construire une pour laquelle chaque entier possède une infinité d'antécédents.

Exercice 7.33 : (niveau 2)

Soit $\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+y,xy) \end{array}$.

1°) Soit $(S,P)\in\mathbb{R}^2$. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $F(x,y)=(S,P)$ d'inconnue $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. L'application F est-elle injective, surjective, bijective ?

2°) Comment peut-on restreindre F pour qu'elle devienne bijective ? On restreindra sur une partie A de $\mathbb{R}^2$ telle que $F(A)=F(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 7.34 : (niveau 2)

Soit E un ensemble non vide muni d'une loi interne associative notée $*$.
On suppose que pour tout $(a,b)\in E^2$, les équations $a*x=b$ et $y*a=b$ admettent au moins une solution.
Montrer que $(E,*)$ est un groupe.

Exercice 7.35 : (niveau 2)

Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si la restriction de f sur $\mathbb{Q}$ est injective, f est-elle nécessairement injective ?

Exercice 7.36 : (niveau 3)

Soit f et g deux bijections de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$. Montrer que l'application $k\longmapsto f(k)g(k)$ n'est pas une bijection de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 7.37 : (niveau 3)

Soit E,E',F,F' quatre ensembles, $u\ :\ E'\longrightarrow E$ et $v\ :\ F\longrightarrow F'$ deux applications.
On pose $\begin{array}{rccc} \Phi: & F^E & \longrightarrow & {F'}^{E'} \\ & f & \longmapsto & v\circ f\circ u \end{array}$.

1°) Montrer que si u est surjective et v injective, alors Φ est injective.

2°) Montrer que si u est injective et v est surjective, alors Φ est surjective.

3°) Étudier les réciproques.

Exercice 7.38 : (niveau 3)

1°) Montrer qu'une application f est surjective si et seulement si
$g_1\circ f=g_2\circ f\Longrightarrow g_1=g_2$, pour tout couple d'applications (g_1,g_2) pour lequel ceci a un sens.

Soit f et g deux applications d'un ensemble X vers un ensemble Y.
Si e est une application de Y vers un ensemble Q, on dit que e est un co-égalisateur de (f,g) si et seulement si

- $e\circ f=e\circ g$;
- pour toute fonction $d\ :\ Y\longrightarrow Q'$ telle que $d\circ f=d\circ g$, il existe une unique application $h\ :\ Q\longrightarrow Q'$ telle que $h\circ e=d$.

2°) Montrer que si e est un co-égalisateur de (f,g), alors e est surjective.

3°) Montrer que (f,g) possède un co-égalisateur.