DS 3 :
Partitions de chaînes et d'antichaînes

Les calculatrices sont interdites.

Notations :

- Lorsque $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{N}_n$ l'ensemble des entiers compris entre 1 et n.
  En particulier, $\mathbb{N}_0 = \emptyset$.
- Pour tout ensemble E, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.
- Pour tout ensemble fini E, on notera $|E|$ son cardinal.

Rappels :

- Deux ensembles finis E et F ont le même cardinal si et seulement si il existe une bijection de E dans F.
- Si E et F sont deux ensembles finis tels que $|E| = |F|$ et $E \subset F$, alors $E = F$.
- Si E et F sont deux ensembles finis de même cardinal, une application f de E dans F est bijective si et seulement si elle est injective, ou bien si et seulement si elle est surjective.

Dans tout ce problème, E désigne un ensemble fini
et $\leq$ désigne une relation d'ordre quelconque sur E.
Si F est une partie de E, la restriction de $\leq$ sur F est encore une relation d'ordre, que l'on continue à noter $\leq$ (on ne demande pas de le démontrer).

Lorsque $C \subset E$, on dit que C est une chaîne de E si et seulement si $\leq$ est un ordre total sur C.
Lorsque $A \subset E$, on dit que A est une antichaîne de E si et seulement si pour tout $x, y \in A$ avec $x \neq y$, x et y ne sont pas comparables pour $\leq$.

Si $P = (P_1, \dots, P_n)$ est un n-uplet de parties de E (où $n \in \mathbb{N}$), on dit que P est une partition de E si et seulement si

- Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $P_i \neq \emptyset$;
- Pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$ avec $i \neq j$, $P_i \cap P_j = \emptyset$;
- $\displaystyle\bigcup_{1 \leq i \leq n} P_i = E$.

Lorsque $P = (P_1, \dots, P_n)$ est un n-uplet de parties de E, on dit que c'est une partition de chaînes si et seulement si c'est une partition telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, P_i est une chaîne.

De même, lorsque $P = (P_1, \ldots, P_n)$ est un n-uplet de parties de E, on dit que c'est une partition d'antichaînes si et seulement si c'est une partition telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, P_i est une antichaîne.

Partie I : Préliminaires

1°) Si E est non vide, montrer qu'il possède au moins un élément minimal.

2°) On suppose que $\leq$ est un ordre total sur E et que E est non vide.
Montrer que E admet un minimum.

3°) Déterminer les parties A de E telles que A est à la fois une chaîne et une antichaîne.
En déduire que l'intersection d'une chaîne de E avec une antichaîne de E est ou bien vide, ou bien un singleton.

4°) Montrer que si C est une chaîne de E, en notant $n = |C|$, il existe une unique bijection strictement croissante de $\mathbb{N}_n$ dans C.
Ainsi, toute chaîne de E est de la forme
$C = \{f(1), \ldots, f(n)\}$, avec $f(1) < f(2) < \cdots < f(n)$.
Dans ce cas, on dit que C est une chaîne de longueur n et d'origine $f(1)$.

5°) Soit C une chaîne de E et $P = (P_1, \ldots, P_n)$ une partition d'antichaînes de E.
Montrer que, pour tout $c \in C$, il existe un unique $i_c \in \mathbb{N}_n$ tel que $c \in P_{i_c}$.
Montrer que l'application $c \longmapsto i_c$ est une injection de C dans $\mathbb{N}_n$.
En déduire que $|C| \leq n$.

6°) Soit A une antichaîne de E et $P = (P_1, \ldots, P_n)$ une partition de chaînes de E.
Montrer que $|A| \leq n$.

Pour toute la suite du problème, on note
- $\mathcal{C}$ l'ensemble des cardinaux des chaînes de E ;
- $\mathcal{A}$ l'ensemble des cardinaux des antichaînes de E ;
- $\mathcal{P}_C$ l'ensemble des entiers n pour lesquels il existe une partition $(P_1, \ldots, P_n)$ de chaînes de E ;
- $\mathcal{P}_A$ l'ensemble des entiers n pour lesquels il existe une partition $(P_1, \ldots, P_n)$ d'antichaînes de E.

7°) À l'aide des questions précédentes, démontrer une inégalité reliant $\max(\mathcal{C})$ et $\min(\mathcal{P}_A)$, ainsi qu'une inégalité reliant $\max(\mathcal{A})$ et $\min(\mathcal{P}_C)$.

Partie II : Deux exemples

8°) Pour cette question, on suppose que $E = \mathcal{P}(\mathbb{N}_3)$, et que $\leq$ est la relation d'inclusion entre parties de E.
a) Dessinez, sans justification, un graphe dont les sommets sont les éléments de E et tel qu'une arête va du sommet s vers le sommet s' si et seulement si $s < s'$ et si, pour tout $s'' \in E$, $\neg(s < s'' < s')$.

b) Calculer $\max(\mathcal{C})$ et $\min(\mathcal{P}_A)$.
c) Calculer $\max(\mathcal{A})$ et $\min(\mathcal{P}_C)$.

9°) Pour cette question, on suppose que $E = \mathbb{N}_{10}$,
et que $\leq$ est la relation de divisibilité.
a) Montrer qu'il s'agit bien d'une relation d'ordre.
b) Dessinez, sans justification, un graphe dont les sommets sont les éléments de E et tel qu'une arête va du sommet s vers le sommet s' si et seulement si $s < s'$ et si, pour tout $s'' \in E$, $\neg(s < s'' < s')$.
c) Calculer $\max(\mathcal{C})$ et $\min(\mathcal{P}_A)$.
d) Calculer $\max(\mathcal{A})$ et $\min(\mathcal{P}_C)$.

Partie III : Partitions de chaînes

Pour tout $x \in E$, on note $f(x)$ le maximum des longueurs des chaînes d'origine x. Cela signifie, en notant $\mathcal{D}$ l'ensemble des chaînes de E que

$$f(x) = \max(\{|C| \ / \ C \in \mathcal{D} \text{ et } x = \min(C)\}).$$

On note également $\ell = \max(\mathcal{C})$.
Ainsi, il existe $x_1, \ldots, x_\ell \in E$ tels que $x_1 < x_2 < \cdots < x_\ell$.
Pour tout $i \in \mathbb{N}_\ell$, on pose $A_i = \{x \in E \ / \ f(x) = i\}$.

10°) Montrer que, pour tout $i \in \mathbb{N}_\ell$, $f(x_i) = \ell - i + 1$.

11°) Montrer que $(A_1, \ldots, A_\ell)$ est une partition de E.

12°) Montrer que, pour tout $i \in \mathbb{N}_\ell$, A_i est une antichaîne.
En déduire que $\max(\mathcal{C}) = \min(\mathcal{P}_A)$.

13°) Donner une autre démonstration de ce dernier résultat en raisonnant par récurrence sur le cardinal de E et en utilisant l'ensemble des éléments maximaux de E.

Partie IV : Cas particulier de $\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)$

Dans cette partie seulement, on suppose que $E = \mathcal{P}(\mathbb{N}_n)$, où $n \in \mathbb{N}$, et que $\leq$ est la relation d'inclusion.
On rappelle que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, le nombre d'éléments de E de cardinal k est égal à $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, c'est-à-dire que

$$|\{F \subset \mathbb{N}_n \ / \ |F| = k\}| = \binom{n}{k}.$$

14°) Déterminer une chaîne de cardinal $n + 1$ et une antichaîne de cardinal $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, où $\lfloor . \rfloor$ désigne la partie entière.

15°) Sans utiliser la partie III, calculer $\max(\mathcal{C})$ et $\min(\mathcal{P}_A)$.

On appelle "chaîne symétrique" de E, toute chaîne de la forme $C = \{E_k, E_{k+1}, \ldots, E_{n-k}\}$, où k est un entier naturel tel que $k \leq n - k$, et où $E_k, \ldots, E_{n-k}$ sont des éléments de E tels que $E_k \subset E_{k+1} \subset \cdots \subset E_{n-k}$ et, pour tout $i \in \{k, k+1, \ldots, n-k\}$, $|E_i| = i$.

16°) Lorsque $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$, donner une partition de E constituée de chaînes symétriques.

17°) On suppose que $n \geq 1$ et que C est une chaîne symétrique de $\mathcal{P}(\mathbb{N}_{n-1})$. Ainsi, $C = \{E_k, E_{k+1}, \ldots, E_{n-1-k}\}$, où k est un entier naturel tel que $k \leq n - 1 - k$, et où $E_k, \ldots, E_{n-1-k}$ sont des éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{N}_{n-1})$ tels que
$E_k \subset E_{k+1} \subset \cdots \subset E_{n-1-k}$ et, pour tout $i \in \{k, k+1, \ldots, n-1-k\}$, $|E_i| = i$.
Montrer que $\{E_k, E_{k+1}, \ldots, E_{n-1-k}, E_{n-1-k} \cup \{n\}\}$ est une chaîne symétrique de E et que $\{E_k \cup \{n\}, E_{k+1} \cup \{n\}, \ldots, E_{n-2-k} \cup \{n\}\}$ est ou bien l'ensemble vide, ou bien une chaîne symétrique de E,

18°) En déduire qu'il existe une partition de E constituée de chaînes symétriques.

19°) Montrer que, pour toute partition $(P_1, \ldots, P_N)$ de E telle que $P_1, \ldots, P_N$ sont des chaînes symétriques, on a $N = \begin{pmatrix} n \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \end{pmatrix}$.
En déduire que $\max(\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} n \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \end{pmatrix}$ (théorème de Sperner).
Sans calcul, en déduire que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} n \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \end{pmatrix}$.

Partie V : Théorème de Dilworth

E désigne à nouveau un ensemble fini quelconque muni d'une relation d'ordre quelconque que l'on note $\leq$. L'objectif de cette partie est de montrer que
$\max(\mathcal{A}) = \min(\mathcal{P}_C)$ (théorème de Dilworth).
On suppose que le théorème de Dilworth est démontré lorsqu'on remplace E par n'importe quel ensemble de cardinal strictement inférieur à $|E|$.
On choisit une chaîne C de E telle que $|C| = \max(\mathcal{C})$.
On pose $\alpha = \max(\mathcal{A})$.

20°) On suppose d'abord que, pour toute antichaîne A de cardinal α de E,
$C \cap A \neq \emptyset$, c'est-à-dire que C rencontre toutes les antichaînes de E de cardinal maximal.
En utilisant $E \setminus C$, montrer que $\max(\mathcal{A}) = \min(\mathcal{P}_C)$.

On suppose maintenant qu'il existe une antichaîne A de cardinal α telle que $A \cap C = \emptyset$.
On pose $A_+ = \{x \in E \ / \ \exists a \in A, \ \ a \leq x\}$ et $A_- = \{x \in E \ / \ \exists a \in A, \ \ x \leq a\}$.

21°) Montrer que $A_+ \cup A_- = E$ et que $A_+ \cap A_- = A$.

22°) En utilisant $\min(C)$ et $\max(C)$, montrer que $A_+ \neq E$ et que $A_- \neq E$.

23°) Conclure.