

Résumé de cours :

Semaine 8, du 6 au 7 novembre.

1 Applications

1.1 Généralités

Définition. Une fonction f de E dans F est un triplet $f = (E, F, \Gamma)$, où E et F sont des ensembles et où Γ est une relation binaire sur $E \times F$ telle que

$\forall x \in E, \forall y, z \in F, (x \Gamma y) \wedge (x \Gamma z) \implies (y = z)$, c'est-à-dire telle que pour tout $x \in E$, il existe au plus un $y \in F$ en relation avec x . On note alors " $y = f(x)$ " au lieu de $x \Gamma y$ ou bien $(x, y) \in \Gamma$.

- Le domaine de définition de f est $\{x \in E / \exists y \in F, x \Gamma y\}$. On le notera $\mathcal{D}_f$.
- Une application de E dans F est une fonction telle que $\mathcal{D}_f = E$.
- E s'appelle l'ensemble de départ de f et F l'ensemble d'arrivée.
- Γ s'appelle le graphe de f . $\Gamma = \{(x, y) \in E \times F / x \Gamma y\} = \{(x, f(x)) / x \in \mathcal{D}_f\}$.
- Lorsque $y = f(x)$, où $x \in E$ et $y \in F$,
 - on dit que y est l'image de x par f et
 - que x est un antécédent de y par f .

Propriété. Soit f une fonction de E vers F et soit g une fonction de E' vers F' . Alors $f = g$ si et seulement si $E = E', F = F', \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g$ et pour tout $x \in \mathcal{D}_f, f(x) = g(x)$.

Définition. Soit E et I deux ensembles. La famille $(e_i)_{i \in I}$ d'éléments de E indexée par I est l'unique application de I dans E dont le graphe est $\{(i, e_i) / i \in I\}$. Il s'agit d'une autre façon de noter une application, parfois mieux adaptée.

Définition. Une suite est une famille d'éléments indexée par $\mathbb{N}$, ou éventuellement par $\{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ (où $n_0 \in \mathbb{N}$).

Définition. Si E et F sont deux ensembles, le triplet $(E, F, \emptyset)$ est une fonction de E dans F , que l'on appelle la fonction vide. Elle est définie sur $\emptyset$.

Le triplet $(\emptyset, F, \emptyset)$ est une application à valeurs dans F , appelée l'application vide.

La famille (d'éléments de E) $(e_i)_{i \in \emptyset}$ désigne l'application vide $(\emptyset, E, \emptyset)$, que l'on appelle aussi la famille vide d'éléments de E .

Notation. L'application identité sur E est définie par : $\forall x \in E, Id_E(x) = x$.

Définition. Soit E un ensemble et A une partie de E . L'indicatrice de A dans E est l'unique application, notée $\mathbf{1}_A$, de E dans $\{0, 1\}$ telle que $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbf{1}_A(x) = 0$ si $x \in E \setminus A$.

Propriété. Soit E un ensemble et A et B deux parties de E . En définissant naturellement la somme, la différence et le produit de deux applications de E dans $\mathbb{R}$, on vérifie que : $\mathbf{1}_{E \setminus A} = \mathbf{1}_E - \mathbf{1}_A$, $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B$ et $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B$.

Il faut savoir le démontrer.

Définition. Soit f une application de E vers F . On suppose que F est muni d'une relation d'ordre $\preceq$. Soit A une partie de E . Les majorant, borne supérieure, minimum etc. de f sur A sont par définition les majorant, borne supérieure, minimum etc. de $f(A)$.

Définition. Soit I un ensemble quelconque et soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments d'un ensemble F . On suppose que F est muni d'une relation d'ordre $\preceq$. Les majorant, borne supérieure, minimum etc. de $(f_i)_{i \in I}$ sont par définition les majorant, borne supérieure, minimum etc. de $\{f_i/i \in I\}$.

Notation. On note $\mathcal{F}(E, F)$ ou bien F^E l'ensemble des applications de E dans F .

F^I est donc aussi l'ensemble des familles indexées par I d'éléments de l'ensemble F .

Définition. Soient E et F deux ensembles, E' une partie de E et F' une partie de F .

- Soit f une application de E dans F . La restriction de f à E' est l'unique application de E' dans F telle que $\forall x \in E', f|_{E'}(x) = f(x)$.
- Soit f une application de E' dans F . On appelle prolongement de f sur E toute application g de E dans F telle que $g|_{E'} = f$.
- Si pour tout $x \in E, f(x) \in F'$, la corestriction de f à F' est l'unique application de E dans F' telle que : pour tout $x \in E, f|^{F'}(x) = f(x)$.
- Si, pour tout $x \in E', f(x) \in F', f|_{E'}^{F'}$ désigne l'application de E' dans F' telle que, pour tout $x \in E', (f|_{E'}^{F'})(x) = f(x)$.

Définition. Soit f une application d'un ensemble E dans lui-même. Une partie A de E est stable par f si et seulement si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

- $\forall x \in A, f(x) \in A$,
- $f(A) \subset A$,
- $f|_A^A$ est définie.

Définition. Soit f une application de E dans F et g une application de F dans G . La composée de g et de f est l'unique application $g \circ f$ de E dans G définie par : $\forall x \in E, (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Associativité de la composition : Soit f une application de E dans F , g une application de F dans G et h une application de G dans H . Alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. On peut donc noter $h \circ g \circ f$ cette fonction.

1.2 Applications croissantes et décroissantes

Définition. Soit f une application d'un ensemble ordonné $(E, \leq_E)$ dans un ensemble ordonné $(F, \leq_F)$.

- f est croissante si et seulement si $[\forall x, y \in E, x \leq_E y \implies f(x) \leq_F f(y)]$.
- f est strictement croissante si et seulement si $\forall x, y \in E, x <_E y \implies f(x) <_F f(y)$.
- f est décroissante si et seulement si elle est croissante de $(E, \leq_E)$ dans $(F, \geq_F)$.
- f est strictement décroissante si et seulement si $\forall x, y \in E, x <_E y \implies f(x) >_F f(y)$.
- f est monotone si et seulement si f est croissante ou décroissante.
- f est strictement monotone si et seulement si f est strictement croissante ou strictement décroissante.

Propriété.

- La composée de deux applications croissantes est croissante.
- La composée de deux applications décroissantes est croissante.
- La composée d'une application croissante et d'une application décroissante est décroissante.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- Si f et g sont croissantes, alors $f + g$ est croissante.
- Si f et g sont décroissantes, alors $f + g$ est décroissante.
- Si f est croissante, $-f$ est décroissante.
- Si f et g sont à valeurs positives et croissantes (resp : décroissantes), alors fg est croissante (resp : décroissante).
- Si f et g sont à valeurs strictement positives et sont strictement croissantes (resp : strictement décroissantes), alors fg est strictement croissante (resp : strictement décroissante).

Il faut savoir le démontrer.

Définition. Soit f et g deux applications d'un ensemble E dans un ensemble ordonné $(F, \leq)$. On écrit $f \leq g$ si et seulement si, pour tout $x \in E$, $f(x) \leq g(x)$.
On définit ainsi une relation d'ordre sur $\mathcal{F}(E, F)$.

1.3 Images directes et réciproques

Définition. Soit f une application de E dans F .

- Si A est une partie de E , l'image directe de A par f est $f(A) \triangleq \{f(x)/x \in A\}$.
Ainsi, $\forall y \in F, y \in f(A) \iff [\exists x \in A, y = f(x)]$.
 $f(A)$ est l'ensemble des images par f des éléments de A .
- Si B est une partie de F , l'image réciproque de B par f est $f^{-1}(B) \triangleq \{x \in E / f(x) \in B\}$. Ainsi, $\forall x \in E, x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$.
 $f^{-1}(B)$ est l'ensemble des antécédents par f des éléments de B .

Propriétés des images directes : Soit f une application de E dans F , $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E , A et A' deux parties de E .

- $A \subset A' \implies f(A) \subset f(A')$.
- $f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$.
- $f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i)$, mais l'inclusion réciproque est fautive en général.
- $f(E \setminus A) \supset f(E) \setminus f(A)$, mais l'inclusion réciproque est fautive en général.

Il faut savoir le démontrer.

Propriétés des images réciproques : Soit f une application de E dans F , $(B_i)_{i \in I}$ une famille de parties de F , B et B' deux parties de F .

- $B \subset B' \implies f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.
- $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$.
- $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$.
- $f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Avec les notations de la propriété précédente,

$A \subset f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(B)) \subset B$, mais les inclusions réciproques peuvent être fausses.

Il faut savoir le démontrer.

1.4 Injectivité et surjectivité

Définition. Soit $f : E \longrightarrow F$. f est injective si et seulement si $\forall x, y \in E, [f(x) = f(y) \implies x = y]$, c'est-à-dire si et seulement si, pour tout couple d'éléments distincts de E , leurs images sont différentes, ou encore si et seulement si tout élément de F possède au plus un antécédent.

Définition. Soit $f : E \longrightarrow F$. f est surjective si et seulement si $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$, c'est-à-dire si et seulement si $f(E) = F$, ou encore si et seulement si tout élément de F possède au moins un antécédent.

Définition. On dit que f est bijective si et seulement si f est injective et surjective, c'est-à-dire si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée possède un unique antécédent dans l'ensemble de départ.

Propriété. Soit f une application de E dans F . Sur E , on définit la relation binaire R par : $xRy \iff f(x) = f(y)$. R est une relation d'équivalence. Alors l'application $\bar{f} : E/R \longrightarrow f(E)$ $\bar{x} \longmapsto f(x)$ est une bijection.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. La composée de deux injections est une injection.

La composée de deux surjections est une surjection.

La composée de deux bijections est une bijection.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit f une application de E dans F et g une application de F dans G .

Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjectif.

Définition et propriété :

◇ Soit f une bijection de E dans F . Pour tout $y \in F$, notons $f^{-1}(y)$ l'unique antécédent de y par f . Alors f^{-1} est une bijection de F dans E , appelée la bijection réciproque de f .

◇ On vérifie que $f \circ f^{-1} = Id_F$ et $f^{-1} \circ f = Id_E$.

◇ Réciproquement, s'il existe une application g de F dans E telle que $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$, alors f et g sont des bijections et $g = f^{-1}$.

◇ $(f^{-1})^{-1} = f$.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ sont bijectives, alors $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Remarque. La notation f^{-1} , pour une application f , est utilisée selon deux sens *différents*, qu'il est important de bien distinguer :

- Lorsque f est une application *quelconque* de E dans F , si B est une partie de F , alors $f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$.
- Lorsque f est une *bijection* de E dans F , pour tout $y \in F$, $f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent de y par f .

En particulier, dès que l'on utilise une expression de la forme $f^{-1}(y)$ où y est un *élément* de l'ensemble d'arrivée de f , on suppose nécessairement que f est une bijection.

Lorsque $y \in F$, il importe de bien distinguer $f^{-1}(y)$ qui représente, pour une bijection f , l'unique antécédent de y , et $f^{-1}(\{y\})$ qui représente, pour une application f quelconque, l'ensemble des antécédents de y . Cet ensemble peut être vide lorsque f n'est pas surjective, il peut contenir plus de deux éléments lorsque f n'est pas injective.

Propriété. Si f est une bijection de E dans F , alors pour tout $B \subset F$, $f(f^{-1}(B)) = B$ et, pour tout $A \subset E$, $f^{-1}(f(A)) = A$.

Propriété. (HP) Les applications injectives sont simplifiables à gauche et les applications surjectives sont simplifiables à droite.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Si $E \neq \emptyset$, alors $f : E \longrightarrow F$ est injective si et seulement si il existe $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = Id_E$.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. $f : E \longrightarrow F$ est surjective si et seulement si il existe $g : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g = Id_F$.

Il faut savoir le démontrer.

2 Lois internes

Définition. Une loi interne sur E est une application f de $E \times E$ dans E . Dans ce contexte la notation *préfixe* “ $f(x, y)$ ” est remplacée par la notation *infixe* “ $x f y$ ”, où $x, y \in E$. On dit que (E, f) est un magma (hors programme).

Définition. Soit Δ une loi interne sur E . Δ est associative si et seulement si pour tout $x, y, z \in E$, $(x \Delta y) \Delta z = x \Delta (y \Delta z)$. On dit alors que (E, Δ) est un magma associatif. Dans ce cas, si $x_1, \dots, x_p \in E$, la quantité $x_1 \Delta x_2 \Delta \dots \Delta x_p$ ne dépend pas des différentes façons de la parenthéser.

Définition. Soit Δ une loi interne sur E et soit $e \in E$. On dit que e est un élément neutre de (E, Δ) si et seulement si, pour tout $x \in E$, $x \Delta e = e \Delta x = x$. Si E possède un élément neutre, il est unique. On dit alors que (E, Δ) est un magma unitaire, ou bien unifère.

Définition. Un monoïde est un magma associatif unitaire. Il est commutatif, ou abélien, si et seulement si pour tout x, y , $x \Delta y = y \Delta x$.

Remarque. l’usage est de confondre le monoïde (E, Δ) et l’ensemble sous-jacent E .

Notation. Si (E, Δ) est un monoïde d’élément neutre e , on convient que $x_1 \Delta x_2 \Delta \dots \Delta x_p = e$, lorsque $p = 0$.

Définition. Soit $(E, \times)$ un monoïde d’élément neutre 1_E et $x \in E$. On dit que x est inversible à droite (resp : à gauche) si et seulement si il existe $y \in E$ tel que $yx = 1_E$ (resp : $xy = 1_E$).

Si x est inversible à gauche et à droite, il existe un unique $y \in E$ tel que $xy = yx = 1_E$. On note $y = x^{-1}$, c’est le symétrique de x .

Il faut savoir le démontrer.

Propriété.

Si x et y sont inversibles dans le monoïde $(E, \times)$, alors xy est aussi inversible et $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

Définition. Un groupe est un monoïde dans lequel tout élément est inversible.

Définition. On appelle **anneau** tout triplet $(A, +, \cdot)$, où A est un ensemble et où “ $+$ ” et “ $\cdot$ ” sont deux lois internes sur A telles que

- $(A, +)$ est un groupe abélien (l’élément neutre étant noté 0 ou 0_A),
- “ $\cdot$ ” est une loi associative, admettant un élément neutre noté 1 ou 1_A ,
- la loi “ $\cdot$ ” est **distributive** par rapport à la loi “ $+$ ”, c’est-à-dire que $\forall (x, y, z) \in A^3$ $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ et $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$.