DM 9 : un corrigé

Partie I : Groupes archimédiens

1°)
◇ Supposons que $0'_G$ est un second élément neutre de G. Ainsi, pour tout $x \in G$, $x + 0_G = x$ et $0'_G + x = x$.
Ainsi, d'après la première égalité appliquée avec $x = 0'_G$, $0'_G + 0_G = 0'_G$ et d'après la seconde égalité appliquée avec $x = 0_G$, $0'_G + 0_G = 0_G$.
On en déduit que $0_G = 0'_G$, ce qui prouve l'unicité de l'élément neutre.
◇ Soit $x \in G$. Supposons qu'il possède deux symétriques, notés y et z.
Alors $y = y + 0_G = y + (x + z) = (y + x) + z = 0_G + z = z$, ce qui prouve l'unicité du symétrique de x.

2°) Soit $(n, m), (n', m'), (n'', m'') \in \mathbb{Z}^2$.

— $(n, m) + (n', m') = (n + n', m + m') \in \mathbb{Z}^2$, donc l'énoncé définit bien une loi interne.

— $(n, m) + (n', m') = (n + n', m + m') = (n' + n, m' + m) = (n', m') + (n, m)$, donc l'addition ainsi définie est commutative.

— $(n, m) + (0, 0) = (n + 0, m + 0) = (n, m)$, donc $(0, 0)$ est un élément neutre.

— $$\begin{aligned}(n, m) + ((n', m') + (n'', m'')) &= (n + n' + n'', m + m' + m'') \\ &= ((n, m) + (n', m')) + (n'', m''),\end{aligned}$$
donc l'addition est associative.

— $(n, m) + (-n, -m) = (n - n, m - m) = (0, 0)$, donc (n, m) admet $(-n, -m)$ comme symétrique.

Ceci prouve que $(\mathbb{Z}^2, +)$ est un groupe commutatif.

3°) Remarquons que pour tout $(x, y), (x', y') \in \mathbb{Z}^2$, $(x, y) \leq_l (x', y') \Longrightarrow x \leq x'$.
Montrons déjà que $\leq_l$ est un ordre. Soit $(n, m), (n', m'), (n'', m'') \in \mathbb{Z}^2$.

— On a $n = n$ et $m \leq m$, donc $(n, m) \leq_l (n, m)$. Ainsi $\leq_l$ est réflexive.

— Supposons que $(n, m) \leq_l (n', m')$ et que $(n', m') \leq_l (n, m)$. Alors, d'après la remarque précédente, $n \leq n'$ et $n' \leq n$, donc $n = n'$. Ainsi, $(n, m) \leq_l (n, m')$ et $(n, m') \leq_l (n, m)$, donc $m \leq m'$ et $m' \leq m$, ce qui prouve que $m = m'$. Ainsi $(n, m) = (n', m')$. On a prouvé que $\leq_l$ est antisymétrique.

— Supposons que $(n, m) \leq_l (n', m')$ et que $(n', m') \leq_l (n'', m'')$. Toujours d'après la remarque, $n \leq n'$ et $n' \leq n''$, donc $n \leq n''$.
Si $n < n''$, alors $(n, m) \leq_l (n'', m'')$.

Sinon, alors $n = n''$, donc $n = n' = n''$. Alors $(n, m) \leq_l (n, m')$ et $(n, m') \leq_l (n, m'')$, donc $m \leq m'$ et $m' \leq m''$. Alors $m \leq m''$ et on a encore $(n, m) \leq_l (n'', m'')$.

Ainsi, dans tous les cas, $(n, m) \leq_l (n'', m'')$, ce qui prouve que $\leq_l$ est transitive.

Ainsi, $\leq_l$ est un ordre sur $\mathbb{Z}^2$. Montrons qu'il est total. Soit $(n, m), (n', m') \in \mathbb{Z}^2$.
Si $n \neq n'$, alors $n < n'$ ou $n' < n$, donc $(n, m) \leq_l (n', m')$ ou $(n', m') \leq_l (n, m)$.
Si $n = n'$, alors $m \leq m'$ ou $m' \leq m$,
donc on a encore $(n, m) \leq_l (n', m')$ ou $(n', m') \leq_l (n, m)$.
Il reste à montrer la compatibilité de $\leq_l$ avec l'addition de $\mathbb{Z}^2$.
Soit $(n, m), (n', m'), (n'', m'') \in \mathbb{Z}^2$ tels que $(n, m) \leq (n', m')$.
Si $n < n'$, alors $n + n'' < n' + n''$, donc $(n, m) + (n'', m'') \leq (n', m') + (n'', m'')$.
Si $n = n'$, alors $m \leq m'$. Dans ce cas, $n + n'' = n' + n''$ et $m + m'' \leq m' + m''$, donc on a encore $(n, m) + (n'', m'') \leq (n', m') + (n'', m'')$.

4°) Notons $R(n)$ l'assertion : $nx > 0_G$.
Lorsque $n = 1$, $x > 0_G$, d'où $R(1)$.
Pour $n \geq 1$, supposons $R(n)$.
On a $0 \leq x_G$, donc par compatibilité de $\leq$ avec $+$, on en déduit
que $nx \leq nx + x = (n + 1)x$. Ainsi, on a $0_G < nx \leq (n + 1)x$, donc $0_G < (n + 1)x$, ce qui prouve $R(n + 1)$.
D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < nx$.

5°) Prenons $x = (1, 0)$ et $y = (0, 1)$. On a bien $(0, 0) \leq_l (1, 0)$ et $(0, 0) \neq (1, 0)$, donc $0_{\mathbb{Z}^2} < (1, 0) = x$ et de même $0_{\mathbb{Z}^2} < (0, 1) = y$.
On montre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $ny = n(0, 1) = (0, n)$.
Or $(0, n) < (1, 0)$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $ny < x$, ce qui prouve que $(\mathbb{Z}^2, +, \leq_l)$ n'est pas un groupe archimédien.

Partie II : Anneaux archimédiens

6°)
$\diamond$ Soit $a \in A$. Par distributivité, $(0_A \times a) + (0_A \times a) = (0_A + 0_A) \times a = 0_A \times a$, donc en ajoutant le symétrique de $0_A \times a$, on obtient
$-(0_A \times a) + ((0_A \times a) + (0_A \times a)) = -(0_A \times a) + (0_A \times a) = 0_A$, donc par associativité de l'addition, on obtient que $0_A \times a = 0_A$.
$\diamond$ Supposons que $1_A = 0_A$. Alors, pour tout $a \in A$, $a = 1_A \times a = 0_A \times a = 0_A$ d'après le point précédent. Ainsi $A \subset \{0_A\}$, or A est un anneau, donc $0_A \in A$. Ainsi, si $1_A = 0_A$, alors $A = \{0_A\}$. On conclut par contraposition.

7°) Posons $x = (1, -1)$ et $y = (0, 1)$. On a $0_{\mathbb{Z}^2} = (0, 0) \leq (1, -1) = x$ et $0_{\mathbb{Z}^2} \leq (0, 1) = y$, mais $xy = (0, -1)$, donc $\neg[(0, 0) \leq xy]$. Ainsi, la régle des signes n'est pas vérifiée, donc $(\mathbb{Z}^2, +, \times, \leq_l)$ n'est pas un anneau totalement ordonné.

8°) Soit $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$.

— $P - P = 0$ et $0 \leq 0$, donc $P \leq P$: $\leq$ est réflexive.

— Supposons que $P \leq Q$ et $Q \leq P$. Raisonons par l'absurde en supposant que $P \neq Q$. Alors $Q-P$ est un polynôme non nul. Notons a son coefficient dominant. Par hypothèse, $0 \leq Q-P$ et $Q-P \neq 0$, donc $a > 0$. Mais on a aussi $0 \leq P-Q$ et $P-Q \neq 0$, or le coefficient dominant de $P-Q$ vaut $-a$, donc $-a > 0$. C'est impossible, donc $P = Q$. Ainsi, $\leq$ est antisymétrique.

— Supposons que $P \leq Q$ et que $Q \leq R$.
Si $P = Q$, alors $P = Q \leq R$.
Si $Q = R$, alors $P \leq Q = R$.
Supposons maintenant que $P \neq Q$ et que $Q \neq R$.
On a $R - P = (R - Q) + (Q - P)$, donc lorsque $R - Q$ et $Q - P$ ont le même degré, $\mathrm{dom}(R - P) = \mathrm{dom}(R - Q) + \mathrm{dom}(Q - P) > 0$,
et lorsque $\deg(R - Q) < \deg(Q - P)$, $\mathrm{dom}(R - P) = \mathrm{dom}(Q - P) > 0$. Enfin, lorsque $\deg(Q - P) < \deg(R - Q)$, $\mathrm{dom}(R - P) = \mathrm{dom}(R - Q) > 0$.
Ainsi, dans tous les cas, on a montré que $P \leq R$, ce qui prouve que $\leq$ est transitive.

9°)

$\diamond$ Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Si $P = Q$, alors $P \leq Q$. Sinon, notons a le coefficient dominant de $Q - P$. Si $a > 0$, alors $P \leq Q$ et si $a < 0$, alors le coefficient dominant de $P - Q$ est strictement positif, donc $Q \leq P$. Ainsi, dans tous les cas, P et Q sont comparables, ce qui prouve que $\leq$ est un ordre total sur $\mathbb{R}[X]$.

$\diamond$ Soit $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que $P \leq Q$. Sachant que $(Q+R)-(P+R) = Q-P$, on en déduit que $P + R \leq Q + R$. Ainsi, $\leq$ est compatible avec $+$.

$\diamond$ Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $0 \leq P$ et $0 \leq Q$.
Si $P = 0$ ou $Q = 0$, alors $PQ = 0$, donc $0 \leq PQ$.
Sinon, $\mathrm{dom}(PQ) = \mathrm{dom}(P)\mathrm{dom}(Q) > 0$, donc $0 \leq PQ$. Ainsi, $\leq$ vérifie la régle des signes. En conclusion, on a montré que $(\mathbb{R}[X], +, \times, \leq)$ est un anneau totalement ordonné.

10°) Posons $x = X$ et $y = 1_{\mathbb{R}[X]}$. Ainsi, $0 < x$ et $0 < y$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. alors $x - ny = X - n$ a pour coefficient dominant 1, qui est strictement positif, donc $ny < x$. L'ordre étant total, on en déduit que $\neg(x < ny)$.
Ainsi, $(\mathbb{R}[X], +, \leq)$ n'est pas archimédien.

Partie III : Corps des fractions d'un anneau intègre

11°) On sait que $(\mathbb{R}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif, différent de $\{0_{\mathbb{R}[X]}\}$.
Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $PQ = 0$. Alors $-\infty = \deg(0) = \deg(PQ) = \deg(P)+\deg(Q)$, donc $\deg(P) = -\infty$ où $\deg(Q) = -\infty$, donc $P = 0$ ou $Q = 0$.
Ainsi, $(\mathbb{R}[X], +, \times)$ est intègre.

12°) Soit $x, y, z \in K$ avec $0_A < z$.
$\diamond$ Supposons que $x \leq y$.
Alors par compatibilité avec l'addition, $0 = x + (-x) \leq y + (-x)$, donc $0 \leq y - x$, puis d'après la règle des signes, $0 \leq z(y - x) = zy - zx$. Alors par compatibilité avec l'addition, $zx \leq zy - zx + zx = zy$.
$\diamond$ Supposons maintenant que $\neg(x \leq y)$. L'ordre étant total, $y < x$, donc d'après le sens direct que l'on vient d'établir, $zy \leq zx$. De plus, si $zx = zy$, alors $z(x-y) = 0$, or $z \neq 0_A$ et l'anneau est intègre, donc $x - y = 0_A$ puis $x = y$ ce qui est faux car $y < x$. Ainsi $zy \leq zx$ et $zy \neq zx$, donc $zy < zx$. On a donc montré que $\neg(x \leq y) \Longrightarrow \neg(zx \leq zy)$. La contraposée fournit la réciproque.

13°) Il suffit de montrer que R est réflexive, symétrique et transitive. Pour cela, on considère trois éléments quelconques de $A \times (A \setminus \{0_A\})$, notés (a, b), (c, d) et (e, f).

— $ab = ba$, donc $(a, b)\ R\ (a, b)$. Ainsi, R est réflexive.
— Supposons que $(a, b)\ R\ (c, d)$. Ainsi, $ad = bc$, or A est commutatif, donc $cb = da$, ce qui prouve que $(c, d)\ R\ (a, b)$, donc R est symétrique.
— Supposons que $(a, b)\ R\ (c, d)$ et que $(c, d)\ R\ (e, f)$. Alors $ad = bc$ et $cf = de$, donc $(ad)f = b(cf) = bde$, donc $d(af - be) = 0$. A est intègre et $d \neq 0$, donc $af = be$ ce qui montre que $(a, b)\ R\ (e, f)$. Ceci prouve que R est transitive.

14°) A est intègre, donc lorsque $b, d \in A \setminus \{0\}$, $bd \neq 0$, ce qui permet d'utiliser les quantités $\dfrac{ac}{bd}$ et $\dfrac{ad + cb}{bd}$.
Il reste à vérifier que les quantités $\dfrac{ac}{bd}$ et $\dfrac{ad + cb}{bd}$ ne dépendent que de $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$, c'est-à-dire des classes d'équivalence de (a, b) et de (c, d).
Supposons que $(a, b)\ R\ (a_1, b_1)$ et $(c, d)\ R\ (c_1, d_1)$.
Il s'agit donc de montrer que $\dfrac{ac}{bd} = \dfrac{a_1c_1}{b_1d_1}$ et que $\dfrac{ad + cb}{bd} = \dfrac{a_1d_1 + c_1b_1}{b_1d_1}$.
On a $ab_1 = ba_1$ et $cd_1 = dc_1$, donc $acb_1d_1 = (ab_1)(cd_1) = (ba_1)(dc_1) = bda_1c_1$.
Ainsi, $\dfrac{ac}{bd} = \dfrac{a_1c_1}{b_1d_1}$.
De plus, $(ad + cb)b_1d_1 = (ab_1)(dd_1) + (cd_1)(bb_1) = ba_1dd_1 + dc_1bb_1 = (a_1d_1 + c_1b_1)bd$, donc $\dfrac{ad + cb}{bd} = \dfrac{a_1d_1 + c_1b_1}{b_1d_1}$.

15°)
$\diamond$ Vérifions d'abord que $(K, +)$ est un groupe abélien ;
Soit $(a, b), (c, d), (e, f) \in A \times (A \setminus \{0_A\})$.

— $\dfrac{c}{d} + \dfrac{a}{b} = \dfrac{cb + da}{db} = \dfrac{ad + bc}{bd} = \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}$, donc l'addition est commutative.
— Posons $0_K = \dfrac{0_A}{1_A}$. Pour tout $(a, b) \in A \times (A \setminus \{0_A\})$, d'après la question 6, $0_K + \dfrac{a}{b} = \dfrac{0_Ab + 1_Aa}{1_Ab} = \dfrac{a}{b}$, donc 0_K est un élément neutre pour l'addition.
— $\dfrac{a}{b} + \dfrac{-a}{b} = \dfrac{ab + (-a)b}{bb} = \dfrac{(a - a)b}{bb} = \dfrac{0_Ab}{bb}$, donc d'après la question 6,

$\dfrac{a}{b}+\dfrac{-a}{b}=\dfrac{0}{bb}=\dfrac{0}{1}$, car $(0,bb)\ R\ (0,1)$, donc $\dfrac{a}{b}+\dfrac{-a}{b}=0$. Ainsi, tout élément de K possède un symétrique, et $-\dfrac{a}{b}=\dfrac{-a}{b}$.

— $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}\right)+\dfrac{e}{f}=\dfrac{ad+bc}{bd}+\dfrac{e}{f}=\dfrac{(ad+bc)f+bde}{bdf}$
et $\dfrac{a}{b}+\left(\dfrac{c}{d}+\dfrac{e}{f}\right)=\dfrac{a}{b}+\dfrac{cf+de}{df}=\dfrac{adf+b(cf+de)}{bdf}$,
donc $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}\right)+\dfrac{e}{f}=\dfrac{a}{b}+\left(\dfrac{c}{d}+\dfrac{e}{f}\right)$, ce qui prouve que l'addition est associative.

⋄ On vérifie ensuite que $(K,+,\times)$ est un anneau :
Soit à nouveau $(a,b),(c,d),(e,f)\in A\times(A\setminus\{0_A\})$.

— $\dfrac{a}{b}\times\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}=\dfrac{ca}{db}=\dfrac{c}{d}\times\dfrac{a}{b}$, donc la multiplication est commutative.

— Posons $1_K=\dfrac{1_A}{1_A}$. Alors $1_K\times\dfrac{a}{b}=\dfrac{1_Aa}{1_Ab}=\dfrac{a}{b}$, donc 1_K est un élément neutre pour la multiplication.

— $\left(\dfrac{a}{b}\times\dfrac{c}{d}\right)\times\dfrac{e}{f}=\dfrac{(ac)e}{(bd)f}=\dfrac{a}{b}\times\left(\dfrac{c}{d}\times\dfrac{e}{f}\right)$, donc la multiplication est associative.

— $\dfrac{a}{b}\times\left(\dfrac{c}{d}+\dfrac{e}{f}\right)=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{cf+de}{df}=\dfrac{acf+ade}{bdf}$ et
$\left(\dfrac{a}{b}\times\dfrac{c}{d}\right)+\left(\dfrac{a}{b}\times\dfrac{e}{f}\right)=\dfrac{ac}{bd}+\dfrac{ae}{bf}=\dfrac{acbf+bdae}{bdbf}$, donc, en simplifiant par b le numérateur et le dénominateur, ce qui est possible car pour tout $x,y\in A\times(A\setminus\{0_A\})$, $(bx,by)\ R\ (x,y)$, on montre que le produit est distributif par rapport à l'addition.

16°) Soit $(K,+,\times)$ un corps. Alors c'est un anneau commutatif tel que $K\neq\{0_K\}$. Soit $x,y\in K$ tels que $xy=0_K$. Si $x\neq 0$, alors x^{-1} est défini car K est un corps, donc $y=1_K\times y=(x^{-1}\times x)\times y=x^{-1}\times(x\times y)=x^{-1}\times 0_K=0_K$ d'après la question 6. Ceci montre que $x=0_K$ ou $y=0_K$, donc $(K,+,\times)$ est bien un anneau intègre.

17°)

— $(A,+,\times)$ est intègre, donc $A\neq\{0_A\}$, donc d'après la question 6, $0_A\neq 1_A$. On en déduit que $\neg((0_A,1_A)\ R\ (1_A,1_A))$, donc $1_K=\frac{1_A}{1_A}\neq\frac{0_A}{1_A}=0_K$. Ainsi, $K\neq\{0_K\}$.

— Soit $f=\dfrac{a}{b}\in K\setminus\{0_K\}$: $\dfrac{a}{b}\neq\dfrac{0_A}{1_A}$, donc $a\neq 0_A$. Ainsi, $(b,a)\in A\times(A\setminus\{0_A\})$ et $\dfrac{b}{a}$ est un élément de K. De plus $\dfrac{a}{b}\times\dfrac{b}{a}=\dfrac{ab}{ab}=\dfrac{1_A}{1_A}$ car $(ab,ab)\ R\ (1_A,1_A)$, donc $f\times\dfrac{b}{a}=1_K$. Ainsi, tout élément non nul de K est inversible. De plus, on a montré que lorsque $b\neq 0_A$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1}=\dfrac{b}{a}$.

Ceci montre que $(K,+,\times)$ est un corps.

18°) Soit $a,b\in A$.

— $\varphi(a)+\varphi(b)=\dfrac{a}{1_A}+\dfrac{b}{1_A}=\dfrac{a+b}{1_A}=\varphi(a+b)$.

— $\varphi(a) \times \varphi(b) = \frac{a}{1_A} \times \frac{b}{1_A} = \frac{ab}{1_A} = \varphi(ab)$.

— $\varphi(1_A) = \frac{1_A}{1_A} = 1_K$,

donc φ est un morphisme d'anneaux.
Soit $a, b \in A$ tels que $\varphi(a) = \varphi(b)$. Alors $(a, 1_A)\ R\ (b, 1_A)$, donc $a = b$. Ainsi φ est injective.

19°) Soit $f \in K$. Il existe $(a, b) \in A \times (A \setminus \{0\})$ tel que $f = \frac{a}{b}$.
On peut écrire $f = \frac{a}{1_A} \times \left(\frac{b}{1_A}\right)^{-1}$, donc grâce à l'identification précédente, $f = a \times b^{-1}$, ce qui montre que $K \subset \{a \times b^{-1} \ / \ (a, b) \in A \times (A \setminus \{0\})\}$.
Réciproquement, si $(a, b) \in A \times (A \setminus \{0\})$, alors $a, b \in K$ avec $b \neq 0$, or K est un corps, donc $ab^{-1} \in K$. Ainsi, $K = \{a \times b^{-1} \ / \ (a, b) \in A \times (A \setminus \{0\})\}$.

Partie IV : Corps non archimédien

20°) Soit $\leq$ un ordre sur $\mathbb{C}$.
Supposons que $(\mathbb{C}, +, \times, \leq)$ est un corps totalement ordonné.
◇ Soit $z \in \mathbb{C}$. D'après la règle des signes, si $0 \leq z$, alors $0 \leq z^2$. Mais si $z \leq 0$, alors par compatibilité de $\leq$ avec $+$, $0 = z + (-z) \leq 0 + (-z)$, donc $0 \leq (-z)$, puis d'après la règle des signes, $0 \leq (-z)^2 = z^2$. Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $0 \leq z^2$.
◇ En particulier, $0 \leq i^2 = -1$, donc $1 = 1 + 0 \leq 1 + (-1) = 0$, or $0 \leq 1^2 = 1$, donc par antisymétrie de $\leq$, $1 = 0$, ce qui est faux dans $\mathbb{C}$.
En conclusion, pour tout ordre $\leq$ sur $\mathbb{C}$, $(\mathbb{C}, +, \times, \leq)$ n'est pas un corps totalement ordonné.

21°) Procédons par analyse-synthèse.
Analyse : supposons qu'il existe un ordre sur $\mathbb{R}(X)$ qui prolonge l'ordre défini sur $\mathbb{R}[X]$ en question 8 et pour lequel $(\mathbb{R}(X), +, \times, \leq)$ est un corps totalement ordonné.
Soit $F, G \in \mathbb{R}(X)$. Il existe $(A, B), (C, D) \in \mathbb{R}[X] \times (\mathbb{R}[X] \setminus \{0_{\mathbb{R}[X]}\})$ tels que $F = \frac{A}{B}$ et $G = \frac{C}{D}$. Quitte à diviser A et B par le coefficient dominant de B, on peut supposer que B est unitaire. De même, on impose que D est unitaire. Alors d'après la définition de la question 8, dans $\mathbb{R}[X]$, $0 < B$ et $0 < D$, donc c'est encore vrai dans $\mathbb{R}(X)$, car l'ordre de $\mathbb{R}(X)$ prolonge celui de $\mathbb{R}[X]$.
$\mathbb{R}(X)$ est un corps, donc d'après la question 16, c'est un anneau intègre. Alors, d'après la question 12, $F \leq G \iff FBD \leq GBD \iff AD \leq CB$, car d'après les questions 18 et 19, $FB = \frac{A}{B}B = \frac{A}{1} = A$ et de même, $GD = C$.
Définissons sur $\mathbb{R}(X)$ la relation binaire R de la façon suivante : pour tout $F, G \in \mathbb{R}(X)$, en écrivant $F = \frac{A}{B}$ et $G = \frac{C}{D}$ avec $A, B, C, D \in \mathbb{R}[X]$ et B et D unitaires, ce qui est toujours possible, on convient que $F\ R\ G$ si et seulement si dans $\mathbb{R}[X]$, $AD \leq CB$.

Il faut montrer que cette définition est valide en prouvant que la condition $AD \leq CB$ ne dépend que de F et de G : supposons que $F = \dfrac{A'}{B'}$ et $G = \dfrac{C'}{D'}$ avec $A', B', C', D' \in \mathbb{R}[X]$ et B' et D' unitaires. Il s'agit de montrer que $AD \leq CB \Longleftrightarrow A'D' \leq C'B'$.
$\dfrac{A}{B} = F = \dfrac{A'}{B'}$, donc $AB' = BA'$ et de même, $CD' = C'D$. Alors, en utilisant plusieurs fois la question 12 dans l'anneau intègre $(\mathbb{R}[X], +, \times)$,

$$\begin{aligned} AD \leq CB \quad & \Longleftrightarrow ADB' \leq CBB' \text{ (car } B' > 0) \\ & \Longleftrightarrow BA'D \leq CBB' \text{ (car } BA' = AB') \\ & \Longleftrightarrow A'D \leq CB' \text{ (car } B > 0) \\ & \Longleftrightarrow A'DD' \leq CB'D' = B'C'D \\ & \Longleftrightarrow A'D' \leq B'C' \text{ (car } D > 0). \end{aligned}$$

On a ainsi montré que s'il existe un ordre sur $\mathbb{R}(X)$ qui prolonge l'ordre défini sur $\mathbb{R}[X]$ en question 8 et pour lequel $(\mathbb{R}(X), +, \times, \leq)$ est un corps totalement ordonné, alors cet ordre est nécessairement égal à R. Ceci prouve donc l'unicité sous condition d'existence.
Synthèse : Il reste à montrer que R est un ordre sur $\mathbb{R}(X)$ qui prolonge l'ordre $\leq$ défini sur $\mathbb{R}[X]$ en question 8 et pour lequel $(\mathbb{R}(X), +, \times, R)$ est un corps totalement ordonné.

- Soit $A, B \in \mathbb{R}[X]$. D'après les questions 18 et 19, $A \ R \ B \Longleftrightarrow \dfrac{A}{1_{\mathbb{R}[X]}} \ R \ \dfrac{B}{1_{\mathbb{R}[X]}} \Longleftrightarrow A \leq B$, d'après la définition de R, donc R prolonge bien $\leq$ sur $\mathbb{R}(X)$.
- Soit $G, H, L \in \mathbb{R}(X)$. Ecrivons $G = \dfrac{A}{B}$, $H = \dfrac{C}{D}$ et $L = \dfrac{E}{F}$, avec $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}[X]$ et B, D, F unitaires.
Dans $\mathbb{R}[X]$, $AB \leq AB$, donc $G \ R \ G$. Ainsi, R est réflexive.
- Supposons que $G \ R \ H$ et $H \ R \ G$. Alors $AD \leq CB$ et $CB \leq AD$, donc par antisymétrie de $\leq$, $AD = CB$, ce qui prouve que $G = H$. Ainsi, R est antisymétrique.
- Supposons que $G \ R \ H$ et que $H \ R \ L$. Ainsi, $AD \leq BC$ et $CF \leq ED$. Alors, d'après la question 12, en utilisant que dans $\mathbb{R}[X]$, $0 < F$ et $0 < B$,
$ADF \leq BCF \leq BED$, or $0 < D$, donc toujours d'après la question 12,
$AF \leq BE$, ce qui prouve que $G \ R \ L$. Ainsi R est transitive, donc c'est bien une relation d'ordre.
- Dans $\mathbb{R}[X]$, l'ordre $\leq$ est total, donc $AD \leq BC$ ou $BC \leq AD$. Ainsi, $G \ R \ H$ ou $H \ R \ G$, ce qui prouve que l'ordre R est total.
- Supposons que $G \ R \ H$.
$$\begin{aligned} (G + L) \ R \ (H + L) \quad & \Longleftrightarrow \frac{AF + BE}{BF} \ R \ \frac{CF + DE}{DF} \\ & \Longleftrightarrow (AF + BE)DF \leq BF(CF + DE), \end{aligned}$$
car DF et BF sont unitaires. Ainsi, d'après la question 12,
$(G + L) \ R \ (H + L) \Longleftrightarrow (AF + BE)D \leq B(CF + DE) \Longleftrightarrow AFD \leq BCF$, d'après la compatibilité de $\leq$ avec l'addition, puis encore avec la question 12, $(G + L) \ R \ (H + L) \Longleftrightarrow AD \leq BC \Longleftrightarrow G \leq H$. Ainsi, R est compatible avec

l'addition de $\mathbb{R}(X)$.

— Supposons que $0 \ R \ G$ et $0 \ R \ H$. Ceci signifie que $0 \leq A$ et $0 \leq C$, or $\leq$ vérifie la règle des signes dans $\mathbb{R}[X]$, donc $0 \leq AC$, ce qui prouve que $0 \ R \ \dfrac{AC}{BD} = GH$. Ainsi, R vérifie la règle des signes. Ceci achève la preuve.

22°) La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}(X)$ est un prolongement de $\leq$ sur $\mathbb{R}[X]$, donc la démonstration de la question 10 reste entièrement valable et prouve que $(\mathbb{R}(X), +, \times, \leq)$ est un corps totalement ordonné non archimédien.

23°) D'après la question 10, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \times 1_{\mathbb{R}(X)} < X$.
Posons $N = \{n \times 1_{\mathbb{R}(X)} \ / \ n \in \mathbb{N}\}$. C'est donc une partie non vide majorée de $\mathbb{R}(X)$.
Supposons que N possède une borne supérieure, que l'on notera $s \in \mathbb{R}(X)$.
$s - 1_{\mathbb{R}(X)} \leq s$, car $0 \leq 1^2 = 1$, donc $-1 \leq 0$. De plus, $s - 1 \neq s$, donc $s - 1 < s$. Par définition de la borne supérieure, $s - 1$ n'est donc pas un majorant de N. Ainsi, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $s - 1_{\mathbb{R}(X)} < n \times 1_{\mathbb{R}(X)}$. On en déduit que $s < (n+1) \times 1_{\mathbb{R}(X)}$, ce qui est incompatible avec la définition de s. Ainsi, N ne possède pas de borne supérieure.

24°) $\diamond$ Soit K un corps totalement ordonné non archimédien. Il existe $x, y \in K$ avec $x > 0$, $y > 0$, et tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $nx \leq y$. Posons $A = \{nx \ / \ n \in \mathbb{N}\}$. Alors A est une partie non vide de K majorée par y. Comme pour la question précédente, supposons que A possède une borne supérieure notée s. Alors $s - x < s$, donc $s - x$ ne majore pas A, donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $s - x < nx$. Alors $s < nx + x = (n+1)x$, ce qui contredit la définition de s. Ainsi A est une partie non vide majorée de K qui ne possède pas de borne supérieure.
$\diamond$ La réciproque est fausse car on sait d'après le cours que $\mathbb{Q}$ est un corps totalement ordonné archimédien mais si l'on pose $A = \{x \in \mathbb{Q} \ / \ 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}$, A est une partie non vide majorée de $\mathbb{Q}$ sans borne supérieure. Démontrons plus précisément ces deux affirmations :
Soit $x, y \in \mathbb{Q}$ tels que $x > 0$ et $y > 0$. Il existe $p, q, a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = \frac{p}{q}$ et $y = \frac{a}{b}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $nx > y \iff npb > aq$, or si l'on choisit $n = aq + 1 \in \mathbb{N}^*$, on a bien $npb \geq n > aq$, donc $\mathbb{Q}$ est archimédien.
Supposons que $A = [0, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$ possède une borne supérieure dans $\mathbb{Q}$, notée s.
Si $s < \sqrt{2}$, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $\alpha \in \mathbb{Q}$ tel que $s < \alpha < \sqrt{2}$. Alors $\alpha \in A$ et $s < a$. C'est impossible.
De même si $\sqrt{2} < s$, il existe $\alpha \in \mathbb{Q}$ tel que $\sqrt{2} < \alpha < s$. Alors α est un majorant dans $\mathbb{Q}$ de A, strictement inférieur au sup : c'est impossible. Ainsi, $s = \sqrt{2}$, donc $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, ce qui est faux.