DM 10. Enoncé

Problème 1 : théorème du point fixe de Tarski et théorème de Cantor-Bernstein

On dit qu'un ensemble ordonné $(E, \leq)$ est un treillis complet si et seulement si toute partie de E possède une borne supérieure et une borne inférieure dans E.

1°)
a) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Montrer que $[a, b]$, muni de l'ordre usuel entre réels, est un treillis complet.
b) Soit F un ensemble. On note $\mathcal{P}(F)$ l'ensemble des parties de F. Montrer que $(\mathcal{P}(F), \subset)$ est un treillis complet.
c) Montrer que $\mathbb{N}$ muni de la relation de divisibilité est un treillis complet.

2°) Soit $(E, \leq)$ un treillis complet.
Soit f une application croissante de E dans E.
Si $x \in E$, on dit que x est un point fixe de f si et seulement si $f(x) = x$.
On pose $A = \{x \in E / x \leq f(x)\}$. On note α la borne supérieure de A.
a) Montrer que $f(\alpha)$ est un majorant de A.
b) Montrer que α est le plus grand point fixe de f.
c) Montrer également que l'ensemble des points fixes de f possède un minimum.

Les résultats des questions b) et c) constituent le théorème du point fixe de Tarski.

3°) Soient E et F deux ensembles.
On suppose qu'il existe une application injective f de E dans F et une application injective g de F dans E. Il s'agit de démontrer le théorème de Cantor-Bernstein qui affirme que dans ces conditions, il existe une bijection de E dans F :
Pour toute $A \in \mathcal{P}(E)$, on pose $G(A) = E \setminus g(F \setminus f(A))$.
En appliquant le théorème du point fixe de Tarski à l'application G, démontrer le théorème de Cantor-Bernstein.

Problème 2 : triplets pythagoriciens

On rappelle que tout rationnel x non nul se décompose de manière unique sous la forme $x = \frac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$, avec p et q premiers entre eux.
On se place dans le plan P usuel, muni d'un repère $R = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé direct. Dans cet exercice, on identifiera les points de P avec le couple de leurs coordonnées dans le repère R.

1°) On note C le cercle de centre O et de rayon 1. On pose $A = (-1, 0)$.
Pour tout point $M \in C \setminus \{A\}$, montrer qu'il existe un unique $t \in \mathbb{R}$ tel que $M = (\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2})$.

2°) Montrer que t est un rationnel si et seulement si les coordonnées de M sont toutes les deux rationnelles.

3°) Soient a, b et c trois entiers naturels tous non nuls tels que $a^2 + b^2 = c^2$.
a) Montrer qu'il existe deux entiers naturels non nuls, u et v, premiers entre eux, tels que $\dfrac{a}{c} = \dfrac{v^2 - u^2}{v^2 + u^2}$ et $\dfrac{b}{c} = \dfrac{2uv}{v^2 + u^2}$.
b) On suppose que 1 est le seul diviseur (dans $\mathbb{N}$) commun de a, b et c.
Montrer que a, b et c sont deux à deux premiers entre eux.
Si l'on suppose que b est pair, montrer que $a = v^2 - u^2$, $b = 2uv$ et $c = v^2 + u^2$.

4°) Expliquer comment construire tous les triplets (a, b, c) d'entiers naturels tous non nuls tels que $a^2 + b^2 = c^2$ (on les appelle les triplets pythagoriciens).

Problème 3 : parties denses dans $\mathbb{R}$.

Première partie : préliminaires.

On "rappelle" qu'une suite (x_n) de réels converge vers un réel ℓ lorsque n tend vers $+\infty$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geq N\ \ |x_n - l| \leq \varepsilon.$$

1°) Soit I un intervalle contenant une infinité de réels, c'est-à-dire que I est non réduit à $\emptyset$ ou à un singleton.
Soit D une partie de I. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\forall x \in I,\ \ \forall \varepsilon > 0,\ \ ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap D \neq \emptyset$.
2. $\forall x \in I,\ \ \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}},\ \ a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$.
3. $\forall x, y \in I,\ \ x < y \Longrightarrow [\exists z \in D,\ \ x < z < y]$.

Lorsqu'elles sont vérifiées, on dit que D est dense dans I.

2°) Soit I un intervalle non réduit à $\emptyset$ ou à un singleton. Soit D une partie de I que l'on suppose dense dans I. Montrer que, pour tout $x \in I$ et $\varepsilon > 0$, $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap D$ est de cardinal infini.

3°) Soit I et J deux intervalles non réduits à $\emptyset$ ou à un singleton. Soit f une application continue et surjective de I dans J.
On admettra que, d'après la continuité de f, pour tout $a \in I$,
pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$, on a $f(a_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$.
Montrer que si D est une partie de I qui est dense dans I,
alors $f(D)$ est dense dans J.

Seconde partie : densité des sous-groupes de $\mathbb{R}$.

On suppose que G est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{R}, +)$, c'est-à-dire que $0 \in G$ et que pour tout $x, y \in G$, $x - y \in G$.
On suppose de plus que G est différent de $\{0\}$.

4°) Montrer que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ possède une borne inférieure, que l'on notera a.

5°) Si $a = 0$, montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.

6°) Dans cette question, on suppose que $a > 0$.
a) On suppose que $a \notin G$.
Montrer qu'il existe $x, y \in G$ tels que $a < x < y < 2a$ et en déduire une contradiction.
b) Montrer que $G = a\mathbb{Z}$.

7°) On dit qu'un point x de G est isolé si et seulement s'il existe un intervalle ouvert I tel que $I \cap G = \{x\}$.
On dit que G est discret si et seulement si tous ses points sont isolés.
Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur a pour que G soit discret.

8°) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^{*2}$. On pose $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{an + bm / (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}$.
Montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\frac{a}{b}$ est irrationnel.

9°) On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$ si et seulement si A est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ tel que $1 \in A$ et, pour tout $a, b \in A$, $ab \in A$.
Montrer que si A est un sous-anneau différent de $\mathbb{Z}$, alors A est dense dans $\mathbb{R}$.

10°) On admet que π est irrationnel.
a) Montrer que $\{\cos n / n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.
b) Soit $\ell \in [-1, 1]$. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \forall N \in \mathbb{N},\ \ \exists n \geq N,\ \ |\ell - \cos n| < \varepsilon.$$

c) Montrer que, pour tout $\ell \in [-1, 1]$, il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\cos(\varphi(n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.