DM 10. Corrigé

Problème 1 : théorème du point fixe de Tarski et théorème de Cantor-Bernstein

1°) a) Soit A une partie de $[a, b]$.
Si $A = \emptyset$, l'ensemble des majorants de A dans $[a, b]$ est égal à $[a, b]$. Cet ensemble admet a comme minimum, donc $\sup A$ est défini et $\sup A = a$. De même on montre que $\inf A$ est défini et que $\inf A = b$.
Supposons maintenant que A est non vide. Alors A est une partie non vide de $\mathbb{R}$, donc d'après la propriété de la borne supérieure, A possède une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.
b majore A, donc $b \geq \sup A$.
Il existe $\alpha \in A$, donc $\sup A \geq \alpha \geq a$. Ainsi $\sup A \in [a, b]$.
Ceci démontre que $\sup A$ est un élément de $[a, b]$ qui majore A et que c'est le plus petit.
Ainsi, A possède bien une borne supérieure en tant que partie de l'ensemble ordonné $([a, b], \leq)$.
De même, on montre que toute partie A de $[a, b]$ possède une borne inférieure, donc $[a, b]$ est un treillis complet.

b) Soit A une partie de $\mathcal{P}(F)$. Les éléments de A sont donc des parties de F.
Si $A = \emptyset$, l'ensemble des majorants de A est $\mathcal{P}(F)$, donc le minimum de l'ensemble des majorants est $\emptyset$. Ainsi, $\sup A$ existe et $\sup A = \emptyset$.
De plus l'ensemble des minorants est aussi $\mathcal{P}(F)$, donc le maximum de l'ensemble des minorants est F. Ainsi, $\inf A$ existe et $\inf A = F$.
Supposons maintenant que A est non vide. Posons $S = \bigcup_{X \in A} X$ et $I = \bigcap_{X \in A} X$.
Pour tout $X \in A$, $I \subset X \subset S$, donc S est un majorant de A et I en est un minorant.
Soit S' un majorant de A. Pour tout $X \in A$, $X \subset S'$, donc $S = \bigcup_{X \in A} X \subset S'$. Ainsi S est le plus petit des majorants.
Soit I' un minorant de A. Pour tout $X \in A$, $I' \subset X$, donc $I' \subset \bigcap_{X \in A} X = I$. Ainsi I est le plus grand des minorants.
On a montré que A possède une borne supérieure et une borne inférieure, pour toute partie A de $\mathcal{P}(F)$, donc que $(\mathcal{P}(F), \subset)$ est un treillis complet.

c) Soit B une partie quelconque de $\mathbb{N}$.

$\diamond$ Notons G le sous-groupe de $\mathbb{Z}$ engendré par B.
D'après le cours, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $G = n\mathbb{Z}$.
Soit $b \in B$: $b \in B \subset G = n\mathbb{Z}$, donc $n \mid b$. Ainsi n est un minorant de B.
Soit $d \in \mathbb{N}$ un minorant de B. Pour tout $b \in B$, $d \mid b$, donc $b \in d\mathbb{Z}$. Ainsi $d\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ qui contient B, donc $d\mathbb{Z} \supset G = n\mathbb{Z}$ ce qui prouve que $d \mid n$. Ainsi n est le plus grand des minorants de B : B possède bien une borne inférieure.
$\diamond$ Lorsque $B \neq \emptyset$, posons $G' = \bigcap_{b \in B} b\mathbb{Z}$. G' est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ en tant qu'intersection de sous-groupes de $\mathbb{Z}$, donc il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $G' = m\mathbb{Z}$.
Soit $b \in B$. $m \in G' \subset b\mathbb{Z}$, donc $b \mid m$. Ainsi m est un majorant de B.
Soit m' un majorant de B. Pour tout $b \in B$, $b \mid m'$, donc $m' \in b\mathbb{Z}$. Ainsi, $m' \in G' = m\mathbb{Z}$, donc $m \mid m'$. m est donc la borne inférieure de B.
Lorsque $B = \emptyset$, l'ensemble des majorants de B est $\mathbb{N}$, qui admet 1 comme minimum, car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \mid n$, donc 1 est la borne supérieure de $\emptyset$.

2°) a) Soit $x \in A$. α majore A, donc $x \leq \alpha$, mais f est croissante, donc $f(x) \leq f(\alpha)$. De plus, $x \leq f(x)$ car $x \in A$, donc $x \leq f(\alpha)$. On a bien montré que $f(\alpha)$ est un majorant de A.
b) Or α est le plus petit des majorants, donc $\alpha \leq f(\alpha)$.
f étant croissante, $f(\alpha) \leq f(f(\alpha))$, donc $f(\alpha) \in A$ puis $f(\alpha) \leq \sup A = \alpha$.
Ainsi, $f(\alpha) = \alpha$, ce qui montre que α est un point fixe de f.
Soit β un second point fixe de f. Alors $\beta \in A$, donc $\beta \leq \alpha$. Ainsi, α est le plus grand point fixe de f.
c) On définit sur E une relation binaire $\geq$ en convenant que, pour tout $x, y \in E$, $x \geq y \iff y \leq x$. On vérifie que $\geq$ est une relation d'ordre. De plus, si A est une partie de E, on vérifie que la borne supérieure de A pour $(E, \leq)$ est la borne inférieure de A pour $(E, \geq)$ et que la borne inférieure de A pour $(E, \leq)$ est la borne supérieure de A pour $(E, \geq)$. Ainsi, $(E, \geq)$ est encore un treillis complet, pour laquelle f reste croissante. On peut donc appliquer le résultat précédent à $(E, \geq)$. Ainsi l'ensemble des points fixes de f possède un maximum pour $(E, \geq)$, c'est-à-dire un minimum pour $(E, \leq)$.

3°) G est une application de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même.
Soit $A, B \in \mathcal{P}(E)$ telles que $A \subset B$. Alors $f(A) \subset f(B)$, donc $F \setminus f(A) \supset F \setminus f(B)$, puis $g(F \setminus f(A)) \supset g(F \setminus f(B))$ et $G(A) \subset G(B)$. Ceci prouve que G est une application croissante de $(\mathcal{P}(E), \subset)$ dans lui-même, lequel est un treillis complet. On peut donc appliquer le théorème du point fixe de Tarski : il existe $A_0 \subset E$ telle que $G(A_0) = A_0$.
On a $E \setminus A_0 = g(F \setminus f(A_0))$. Ainsi, l'application $g' = g|_{F \setminus f(A_0)}^{E \setminus A_0}$ est définie et surjective, or elle est injective en tant que restriction d'une application injective, donc g' est une bijection.
Lorsque $x \in A_0$, posons $h(x) = f(x)$. Lorsque $x \in E \setminus A_0$, posons $h(x) = {g'}^{-1}(x)$.
Montrons que h est une bijection de E dans F.
$\diamond$ $E = A_0 \sqcup (E \setminus A_0)$, donc h est définie sur E. De plus, si $x \in A_0$, $f(x) \in f(A_0) \subset F$ et si $x \in E \setminus A_0$, $f(x) \in F \setminus f(A_0) \subset F$, donc h est une application de E dans F.

$\diamond$ Montrons que h est injective. Soit $x, x' \in E$ tels que $h(x) = h(x')$.
Si $x \in A_0$ et $x' \in E \setminus A_0$, alors $h(x) = f(x) \in f(A_0)$ et $h(x) = h(x') \in F \setminus f(A_0)$. C'est impossible donc $x, x' \in A_0$ ou bien $x, x' \in E \setminus A_0$.
Lorsque $x, x' \in A_0$, $f(x) = h(x) = h(x') = f(x')$ et f est injective, donc $x = x'$.
Lorsque $x, x' \in E \setminus A_0$, $x = g(h(x)) = g(h(x')) = x'$.
Ceci démontre que h est injective.
$\diamond$ Montrons que h est surjective. Soit $y \in F$.
Si $y \in f(A_0)$, il existe $x \in A_0$ tel que $y = f(x) = h(x)$.
Sinon, $y \in F \setminus f(A_0)$, donc $y = g'^{-1}(g(y)) = h(g(y))$.
Ceci démontre que h est surjective, donc c'est bien une bijection de E sur F.

Problème 2 : triplets pythagoriciens

1°) Soit $M \in C \setminus \{A\}$. Notons (x, y) les coordonnées de M. $x^2 + y^2 = 1$, donc d'après le cours, il existe $\theta \in [-\pi, \pi]$ tel que $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$.
$M \neq A$, donc $\theta \in]-\pi, \pi[$.
Ainsi $\frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc on peut poser $t = \tan\frac{\theta}{2}$.
Alors $\dfrac{1-t^2}{1+t^2} = \cos^2\dfrac{\theta}{2}(1 - \dfrac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}) = \cos\theta$ et $\dfrac{2t}{1+t^2} = (\cos^2\dfrac{\theta}{2}) \times 2\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \sin\theta$.
Ceci prouve qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $y = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

Soit maintenant $t' \in \mathbb{R}$ tel que $x = \dfrac{1-t'^2}{1+t'^2}$ et $y = \dfrac{2t'}{1+t'^2}$.
Il existe $\theta' \in]-\pi, \pi[$ tel que $t' = \tan\frac{\theta'}{2}$, car tan est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$. Alors d'après le calcul précédent, $x = \cos\theta' = \cos\theta$ et $y = \sin\theta' = \sin\theta$, donc $\theta \equiv \theta'\ [2\pi]$, puis $t = \tan\frac{\theta}{2} = \tan\frac{\theta'}{2} = t'$, ce qui prouve l'unicité.

2°) Si t est rationnel, $\mathbb{Q}$ étant un corps, $x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \in \mathbb{Q}$ et $y = \dfrac{2t}{1+t^2} \in \mathbb{Q}$.
Réciproquement, supposons que x et y sont rationnels. $M \neq A$, donc $x \neq -1$. On peut donc considérer la quantité $\dfrac{y}{x+1}$. Mais $x + 1 = \dfrac{1-t^2+1+t^2}{1+t^2} = \dfrac{2}{1+t^2}$, donc $\dfrac{y}{x+1} = \dfrac{2t}{1+t^2} \times \dfrac{1+t^2}{2} = t$, donc $t \in \mathbb{Q}$.

3°) a) On a $(\dfrac{a}{c})^2 + (\dfrac{b}{c})^2 = 1$, donc le point M de coordonnées $x = \frac{a}{c}$ et $y = \frac{b}{c}$ est un point de C avec $x \neq -1$ car $x \geq 0$, donc $M \in C \setminus \{A\}$. De plus $x, y \in \mathbb{Q}$, donc d'après les questions précédentes, il existe $t \in \mathbb{Q}$ tel que $x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $y = \dfrac{2t}{1+t^2}$.
On peut écrire $t = \frac{u}{v}$ avec $u \in \mathbb{Z}$, $v \in \mathbb{N}^*$ et $u \wedge v = 1$, donc $\dfrac{a}{c} = \dfrac{v^2-u^2}{v^2+u^2}$ et $\dfrac{b}{c} = \dfrac{2uv}{v^2+u^2}$.
Si $u \leq 0$, alors $\frac{b}{c} \leq 0$ ce qui est faux, donc $u \in \mathbb{N}^*$.

b) Supposons que a et b ne sont pas premiers entre eux. Il existe alors un diviseur premier p commun de a et b. Alors p divise $a^2+b^2=c^2$. p intervient donc dans la décomposition de c^2 en facteurs premiers, donc également dans celle de c. Ainsi, p est un diviseur premier commun de a, b et c, ce qui est impossible. Ainsi, $a \wedge b = 1$. De même, on montre que $a \wedge c = b \wedge c = 1$.

Supposons que b est pair. Ainsi, $\dfrac{\left(\frac{b}{2}\right)}{c} = \dfrac{uv}{u^2+v^2}$.
Supposons l'existence d'un diviseur p premier commun de uv et de u^2+v^2.
Alors p divise $-u(uv)+v(u^2+v^2)=v^3$ et $u(u^2+v^2)-v(uv)=u^3$, donc p divise $u^3 \wedge v^3$, mais $u \wedge v = 1$, donc d'après le cours, $u^3 \wedge v^3 = 1$. Ainsi p divise 1 ce qui est impossible avec p premier. Ceci démontre que$(uv) \wedge (u^2+v^2) = 1$, donc $\dfrac{uv}{u^2+v^2}$ est l'écriture irréductible de la fraction $\dfrac{\left(\frac{b}{2}\right)}{c}$, mais elle est déjà sous forme irréductible car b et c sont premiers entre eux, donc par unicité de la forme irréductible d'une fraction rationnelle, on a $\frac{b}{2} = uv$ et $c = u^2+v^2$.
De plus, $\dfrac{a}{c} = \dfrac{v^2-u^2}{v^2+u^2}$ donc $a = v^2-u^2$.

4°)

◇ Choisissons $u \in \mathbb{N}^*$ puis un entier v strictement supérieur à u et premier avec u. Posons $a = v^2-u^2$ et $b = 2uv$, ou bien $a = 2uv$ et $b = v^2-u^2$. Posons $c = u^2+v^2$. Choisissons $d \in \mathbb{N}^*$ et posons $A = da$, $B = db$ et $C = dc$.
On vérifie que $(v^2-u^2)^2+(2uv)^2 = (u^2+v^2)^2$, donc $A^2+B^2 = C^2$. Ainsi, (A, B, C) est un triplet pythagoricien. On vient ainsi de fournir un procédé explicite de construction de triplets pythagoriciens.
◇ Il reste à montrer que ce procédé fournit tous les triplets pythagoriciens.
Supposons que $A, B, C \in \mathbb{N}^*$ avec $A^2+B^2 = C^2$.
Notons d le PGCD de A, B, C. Il existe $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ tels que $A = ad$, $B = bd$ et $C = cd$. De plus a, b, c sont premiers entre eux.
Si a est pair, il existe a' tel que $a = 2a'$ et $a^2 = 4a'^2 \equiv 0\ [4]$.
Si a est impair, il existe a' tel que $a = 2a'+1$ et $a^2 = 4a'^2+4a+1 \equiv 1\ [4]$.
Il en est de même pour b, donc si a et b sont tous deux impairs, $c^2 = a^2+b^2 \equiv 2\ [4]$, ce qui est impossible. Ainsi, parmi a et b, seul l'un des deux est pair. Par symétrie des rôles joués par a et b, on peut supposer que b est pair.
On peut donc appliquer les questions précédentes : il existe $u, v \in \mathbb{N}^*$ tels que $u < v$, $u \wedge v = 1$, $a = v^2-u^2$, $b = 2uv$ et $c = v^2+u^2$, ce qu'il fallait démontrer.

Problème 3 : parties denses dans $\mathbb{R}$.

Première partie : préliminaires.

1°)
$\diamond$ $1 \Longrightarrow 2$: on suppose la propriété 1.
Soit $x \in I$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en posant $\varepsilon = \frac{1}{n}$, d'après la propriété 1, $]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[\cap D \neq \emptyset$, donc il existe $a_n \in D$ tel que $|x - a_n| \leq \frac{1}{n}$, or $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc d'après le principe des gendarmes, $|x - a_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.
$\diamond$ $2 \Longrightarrow 3$: on suppose la propriété 2.
Soit $x, y \in I$ avec $x < y$. Posons $z = \frac{x+y}{2}$. $z \in I$, car I est un intervalle, donc d'après la propriété 2, il existe une suite (a_n) d'éléments de D telle que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} z$. En particulier, pour $\varepsilon = \frac{y-x}{4} > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|a_N - z| \leq \varepsilon$. Ainsi, $|a_N - \frac{x+y}{2}| < \frac{y-x}{2}$, donc $x < a_N < y$ et $a_N \in D$.
$\diamond$ $3 \Longrightarrow 1$: on suppose la propriété 3.
Soit $x \in I$. Soit $\varepsilon > 0$. I possède une borne inférieure m et une borne supérieure M dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. I n'est pas réduit à $\emptyset$ et n'est pas un singleton, donc $m < M$.
Premier cas : On suppose que $m < x < M$.
Alors il existe $\varepsilon' > 0$ avec $\varepsilon' < \varepsilon$, tel que $\varepsilon' < x - m$ et $\varepsilon' < M - x$.
Alors $m < x - \varepsilon' < x < x + \varepsilon' < M$, donc $x - \varepsilon', x + \varepsilon' \in I$: d'après la propriété 3, il existe $z \in D$ tel que $x - \varepsilon' < z < x + \varepsilon'$. Par construction, $z \in D\cap]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$.
Second cas : On suppose que $m \in \mathbb{R}$ et que $x = m$.
Il existe $\varepsilon' > 0$ avec $\varepsilon' < \varepsilon$, tel que $x = m < x + \varepsilon' < M$. Alors $x + \frac{\varepsilon'}{2}$ et $x + \varepsilon'$ sont dans I, donc il existe $z \in D$ tel que $x + \frac{\varepsilon'}{2} < z < x + \varepsilon'$. Alors, $z \in D\cap]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$.
Troisième cas : On suppose que $M \in \mathbb{R}$ et que $x = M$.
Il existe $\varepsilon' > 0$ avec $\varepsilon' < \varepsilon$, tel que $m < x - \varepsilon' < M = x$. Alors $x - \frac{\varepsilon'}{2}$ et $x - \varepsilon'$ sont dans I, donc il existe $z \in D$ tel que $x - \varepsilon' < z < x - \frac{\varepsilon'}{2}$. Alors, $z \in D\cap]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$.

2°) Soit $x \in I$ et $\varepsilon > 0$. Adaptons la démonstration de la dernière implication.
Premier cas : On suppose que $m < x < M$.
Alors il existe $\varepsilon' > 0$ avec $\varepsilon' < \varepsilon$, tel que $m < x - \varepsilon' < x < x + \varepsilon' < M$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $m < x + \frac{\varepsilon'}{n+1} < x + \frac{\varepsilon'}{n} < M$ donc d'après la propriété 3, il existe $z_n \in D$ tel que $x + \frac{\varepsilon'}{n+1} < z_n < x + \frac{\varepsilon'}{n}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_{n+1} < z_n$, donc la famille $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ constitue une infinité d'éléments situés dans $D\cap]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$.
Second cas : On suppose que $m \in \mathbb{R}$ et que $x = m$.
Il existe $\varepsilon' > 0$ avec $\varepsilon' < \varepsilon$, tel que $x = m < x + \varepsilon' < M$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $m < x + \frac{\varepsilon'}{n+1} < x + \frac{\varepsilon'}{n} < M$ donc on peut conclure comme lors du premier cas.
Troisième cas : On suppose que $M \in \mathbb{R}$ et que $x = M$.
Il existe $\varepsilon' > 0$ avec $\varepsilon' < \varepsilon$, tel que $m < x - \varepsilon' < M = x$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $m < x - \frac{\varepsilon'}{n} < x - \frac{\varepsilon'}{n+1} < M$ donc d'après la propriété 3, il existe $z_n \in D$ tel que $x - \frac{\varepsilon'}{n} < z_n < x - \frac{\varepsilon'}{n+1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n < z_{n+1}$, donc la famille $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ constitue une infinité d'éléments situés dans $D\cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$.

3°) Soit $y \in J$. f étant surjective, il existe $x \in I$ tel que $y = f(x)$.
D est dense dans I, donc il existe une suite (a_n) d'éléments de D telle que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.
D'après la continuité de f, $f(a_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$, or $(f(a_n))$ est une suite d'éléments de $f(D)$, donc d'après la propriété 2 de la question 1, $f(D)$ est dense dans J.

Seconde partie : densité des sous-groupes de $\mathbb{R}$.

4°) Il suffit de montrer que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$.
◇ $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est minorée par 0.
◇ $\{0\} \subset G$, car G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, et $G \neq \{0\}$, donc il existe $x \in G$ tel que $x \neq 0$. G étant un groupe, $\{x, -x\} \subset G$, donc $|x| \in (G \cap \mathbb{R}_+^*)$, ce qui prouve que $G \cap \mathbb{R}_+^* \neq \emptyset$.

5°) On suppose que $a = 0$. D'après la propriété 1 de la question 1,
Il faut montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \;\; \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \;\; G\cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\neq \emptyset$.
Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. ε n'est pas un minorant de $G \cap \mathbb{R}_+^*$, donc il existe $\alpha \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $0 < \alpha < \varepsilon$.
Posons $q = \left\lfloor \frac{x}{\alpha} \right\rfloor$. $q \leq \frac{x}{\alpha} < q+1$, donc $q\alpha \leq x < q\alpha + \alpha$.
Ainsi, $x < (q+1)\alpha \leq x + \alpha < x + \varepsilon$, ce qui montre que $(q+1)\alpha \in G\cap]x, x+\varepsilon[$.
Ainsi, G est dense dans $\mathbb{R}$.

6°) a) $2a > a$, or, par définition d'une borne inférieure, a est le plus grand des minorants de $(G \cap \mathbb{R}_+^*)$, donc $2a$ n'est pas un minorant de $G \cap \mathbb{R}_+^*$. Ainsi, il existe $x \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $x < 2a$. Mais $a \notin G$, donc $a < x$. Ainsi x n'est pas un minorant de $G \cap \mathbb{R}_+^*$ et il existe $y \in (G \cap \mathbb{R}_+^*)$ tel que $a < y < x < 2a$.
Alors $0 < x - y < a$ et $x - y \in G \cap \mathbb{R}_+^*$. C'est impossible d'après la définition de a.
Ainsi $a \in G$.
b) On en déduit que $a\mathbb{Z} = Gr(a) \subset G$.
Réciproquement, soit $g \in G$. Posons $q = \left\lfloor \frac{g}{a} \right\rfloor$.
$q \leq \frac{g}{a} < q+1$, donc $qa \leq g < qa + a$ ce qui implique que $0 \leq g - qa < a$.
Si $g - qa \neq 0$, alors $g - qa \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ et $g - qa < a$, ce qui est impossible.
Ainsi $g = qa \in a\mathbb{Z}$. On a donc montré que $G = a\mathbb{Z}$.

7°) Supposons d'abord que $a = 0$. Alors G est dense dans $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit I un intervalle ouvert contenant x. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset I$. D'après la question 2, $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap G$ est de cardinal infini, donc $I \cap G$ n'est pas réduit à $\{x\}$.
Ainsi aucun point de G n'est isolé, donc G n'est pas discret.
Supposons maintenant que $a > 0$. Alors $G = a\mathbb{Z}$, donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$, dans l'intervalle ouvert $]na - \frac{a}{2}, na + \frac{a}{2}[$, seul na appartient à G, donc G est discret.

En conclusion, G est discret si et seulement si $\inf(G \cap \mathbb{R}_+^*) > 0$. Dans tous les cas, G est ou bien discret, ou bien dense dans $\mathbb{R}$.

8°) Posons $G = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$. D'après le cours, G est le groupe engendré par $\{a, b\}$, donc c'est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.
◇ Supposons que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$.
Alors il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = c\mathbb{Z}$.
$a \in (a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z})$, donc il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $a = pc$. De même, il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $b = qc$. Ainsi $\dfrac{a}{b} = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.
◇ Réciproquement, supposons que $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$.
Ainsi, il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{p}{q}$.
$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} + \dfrac{aq}{p}\mathbb{Z} \subset \dfrac{a}{p}\mathbb{Z}$, donc $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$.
On a donc montré que $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\frac{a}{b}$ est rationnel, donc par contraposition, $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\frac{a}{b}$ est un irrationnel.

9°) On suppose que A est un sous-anneau de $\mathbb{R}$ différent de $\mathbb{Z}$. En particulier, A est un sous-groupe de $\mathbb{R}$. Posons $a = \inf(A)$.
$1 \in A \cap \mathbb{R}_+^*$, donc $a \leq 1$. Si $a = 1$ alors $A = 1.\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ ce qui est faux, donc $a < 1$.
Supposons que $a > 0$. A étant un sous-anneau, $a^2 \in A \cap \mathbb{R}_+^*$, donc $a \leq a^2$, puis $1 \leq a$, ce qui est faux. Ainsi $a = 0$ et A est dense dans $\mathbb{R}$.

10°) a) 2π est irrationnel, donc d'après la question 8, $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. L'application cos est une surjection de $\mathbb{R}$ sur $[-1, 1]$, donc d'après la question 3, $\cos(\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z})$ est dense dans $[-1, 1]$. Or cos est 2π-périodique, donc
$\cos(\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}) = \cos(\mathbb{Z})$. De plus cos est paire, donc $\cos(\mathbb{Z}) = \cos(\mathbb{N})$.
Ainsi $\cos(\mathbb{N}) = \{\cos n / n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

b) Soit $\ell \in [-1, 1]$. Soit $\varepsilon > 0$.
D'après la question 2, $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[\cap \{\cos n / n \in \mathbb{N}\}$ est infini, donc $\{n \in \mathbb{N} / |\cos n - \ell| < \varepsilon\}$ est aussi infini. C'est une partie infinie de $\mathbb{N}$, donc elle n'est pas majorée. Ainsi : $\forall N \in \mathbb{N},\ \exists n > N,\ |\ell - \cos n| < \varepsilon$.
c) Soit $\ell \in [-1, 1]$. D'après la question précédente, avec $\varepsilon = 1$ et $N = 0$, il existe un entier $n \geq 0$ tel que $|\ell - \cos n| < 1$. Notons $\varphi(0)$ le minimum de ces entiers.
D'après la question précédente, avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et $N = \varphi(0) + 1$, il existe un entier $n > \varphi(0)$ tel que $|\ell - \cos n| < \frac{1}{2}$. Notons $\varphi(1)$ le minimum de ces entiers.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que nous avons construit $(\varphi(h))_{0 \leq h \leq k}$ une famille d'entiers telle que, pour tout i, j avec $0 \leq i < j \leq k$, $\varphi(i) < \varphi(j)$ et telle que, pour tout $h \in \{0, \ldots, k\}$, $|\ell - \cos \varphi(h)| < 2^{-h}$. Alors, d'après la question précédente, avec $\varepsilon = 2^{-k-1}$ et $N = \varphi(k) + 1$, il existe un entier $n > \varphi(k)$ tel que $|\ell - \cos n| < 2^{-k-1}$. Notons $\varphi(k + 1)$ le minimum de ces entiers.
On construit ainsi par récurrence une application φ, de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, strictement croissante, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\ell - \cos \varphi(n)| < 2^{-n}$. D'après le principe des gendarmes, $\cos \varphi(n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.