MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 8 : du lundi 27 novembre au vendredi 1er décembre.

Liste des questions de cours

1°) Montrer que $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable.

2°) Montrer qu'une réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.

3°) Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

4°) Exprimez le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ en fonction de celui de E. Démontrez-le.

5°) Soit $(G, \times)$ un groupe commutatif fini. Montrer que, pour tout $g \in G$, $g^{|G|} = 1_G$.

6°) Enoncer et démontrer le principe des bergers.

7°) Déterminer la probabilité que 2 élèves au moins aient la même date d'anniversaire dans une classe de 47 élèves.

8°) Donner une preuve combinatoire de la formule "comité-président".

9°) Donner une preuve combinatoire de la formule du triangle de Pascal.

10°) Combien le mot MISSISSIPPI possède-t-il d'anagrammes, qu'ils aient un sens ou non ?

11°) Enoncer et démontrer la formule du binôme de Newton.

12°) Enoncer et démontrer la formule du multinôme.

13°) Enoncer et démontrer le petit théorème de Fermat.

14°) Pour une famille $(u_{k,\ell})$ d'éléments d'un monoïde commutatif $(G, +)$, écrire en justifiant la somme $\displaystyle\sum_{m \leq k \leq \ell \leq n} u_{k,\ell}$ sous la forme "$\displaystyle\sum_k \sum_\ell$" puis sous la forme "$\displaystyle\sum_\ell \sum_k$".

Les thèmes de la semaine

Ensembles dénombrables, dénombrement et sommes finies

1 Ensembles dénombrables

Un ensemble est au plus dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

Lemme technique : I est fini ou dénombrable si et seulement s'il existe une suite croissante $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties finies de I dont la réunion est égale à I. On dit alors que $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite adaptée à I.

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.

Une réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.

Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

Cardinaux d'ensembles usuels

Cardinal d'une réunion disjointe finie.
Cardinal du complémentaire.
Cardinal de $A \cup B$.
Formule du crible (hors programme).

Propriété. Si E est fini, alors E/R est aussi de cardinal fini, inférieur à celui de E.

Cardinal d'un produit cartésien d'ensembles finis.
$|\mathcal{F}(E, F)| = |F|^{|E|}$.
$|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$.

Sommes et produits finis

Les termes des sommes considérées sont des éléments d'un monoïde commutatif $(G, +)$.

Commutativité généralisée : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x_1, \ldots, x_n \in G$. Alors, $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{\sigma(j)}$.

Définition. Soit A un ensemble fini et $(x_a)_{a \in A}$ une famille de G indexée par A.

Notons $n = |A|$. Il existe une bijection f de $\mathbb{N}_n$ dans A. On pose $\displaystyle\sum_{a \in A} x_a \triangleq \sum_{i=1}^{n} x_{f(i)}$.

Cette quantité ne dépend pas de la bijection f.

Propriété d'additivité : $\displaystyle\sum_{a \in A} (x_a + y_a) = \Big(\sum_{a \in A} x_a\Big) + \Big(\sum_{a \in A} y_a\Big)$.

Distributivité généralisée : Dans un anneau, $\displaystyle\sum_{a \in A} (\lambda x_a) = \lambda \sum_{a \in A} x_a$.

Changement de variable dans une somme finie : Soit B un ensemble fini, $(x_b)_{b \in B}$ une famille d'éléments de G. Soit φ une bijection d'un ensemble A dans B. Alors $\displaystyle\sum_{b \in B} x_b = \sum_{a \in A} x_{\varphi(a)}$.

Sommation par paquets : Soit A un ensemble fini et $(x_a)_{a \in A}$ une famille d'éléments de G. On suppose qu'il existe un ensemble fini B et une famille $(A_b)_{b \in B}$ de parties de A telles que $A = \displaystyle\bigsqcup_{b \in B} A_b$.

Alors $\displaystyle\sum_{a \in A} x_a = \sum_{b \in B} \sum_{a \in A_b} x_a$.

Sommation par paquets, seconde formulation : Soit A un ensemble fini et $(x_a)_{a \in A}$ une famille d'éléments de G. Soit R une relation d'équivalence sur A. Alors $\displaystyle\sum_{a \in A} x_a = \sum_{c \in A/R} \sum_{a \in c} x_a$.

Applications et cardinaux

Propriété. Soit E un ensemble fini et $f : E \longrightarrow F$. Alors $f(E)$ est fini. De plus,
$|f(E)| \leq |E|$, avec égalité si et seulement si f est injective, et
$|f(E)| \leq |F|$, avec égalité si et seulement si f est surjective.

Propriété. Si $f : E \longrightarrow F$ avec $|E| = |F| < \infty$, alors f injective $\iff$ f surjective $\iff$ f bijective .

Propriété. S'il existe une injection de A dans B et si B est fini, alors A est fini et $|A| \leq |B|$.

S'il existe une surjection de A dans B et si A est fini, alors B est fini et $|A| \geq |B|$.

Principe des tiroirs.
Principe des bergers.

Listes et combinaisons

p-listes, p-arrangements, p-combinaisons.
Bijection entre les p-arrangements de E et les injections de $\mathbb{N}_p$ dans E.

Nombre de p-arrangements dans un ensemble de cardinal n : $n(n-1)\cdots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.
$|\mathcal{S}_n| = n!$.

Nombre de p-combinaisons d'éléments d'un ensemble de cardinal n : $\dbinom{n}{p} \triangleq \dfrac{A_{n,p}}{p!} = \dfrac{n!}{(n-p)!p!}$.

Coefficients binomiaux

Formule : $\forall n, p \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq p \leq n$, $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}$.

Formule comité-président : Pour tout $n, k \in \mathbb{N}^*$ avec $k \leq n$, $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$.

Formule comité-bureau : si $p \leq k \leq n$, $\dbinom{k}{p} \times \dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{p} \times \dbinom{n-p}{k-p}$.

Formule du triangle de Pascal : Si $n \geq 1$, $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n-1}{p} + \dbinom{n-1}{p-1}$.

Remarque. On convient parfois que, pour tout $n, p \in \mathbb{Z}$ tels que $\neg(0 \leq p \leq n)$, $\dbinom{n}{p} = 0$.

Formule du binôme de Newton : On se place dans un anneau $(A, +, \times)$. Soit a_1 et a_2 deux éléments de A qui commutent, c'est-à-dire tels que $a_1a_2 = a_2a_1$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ (a_1 + a_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_1^k\ a_2^{n-k}.$$

Formule du multinôme : (Hors programme). Soit $p, n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a_1, \ldots, a_p$ p éléments d'un anneau A qui commutent deux à deux. Alors

$$(a_1 + \cdots + a_p)^n = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_p \in \mathbb{N} \\ \text{tel que } i_1+\cdots+i_p=n}} \frac{n!}{i_1! \times \cdots \times i_p!}\ a_1^{i_1} \times \cdots \times a_p^{i_p}.$$

Petit théorème de Fermat : Soit $p \in \mathbb{P}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors $n^p \equiv n$ modulo p.
En particulier, si $n \notin p\mathbb{Z}$, alors $n^{p-1} \equiv 1$ modulo p.

Sommes et produits : quelques techniques

Sommes et produits télescopiques.

Séparation des indices pairs et impairs.

Fonction génératrice d'une famille de complexes $(u_k)_{m\leq k\leq n}$: $x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=m}^{n} u_k x^k$.

Sommes des termes d'une suite arithmétique, d'une suite géométrique.

Formule de Bernoulli : Si a et b commutent dans un anneau A, $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$.

Sommes doubles : $\displaystyle\sum_{\substack{m \leq k \leq n \\ p \leq \ell \leq q}} u_{k,\ell}$.

Sommes triangulaires : $\displaystyle\sum_{m \leq k \leq \ell \leq n} u_{k,\ell}$.

Prévisions pour la semaine prochaine :

Les complexes.