DM 11. Corrigé

Partie I : Nombre de surjections entre ensembles finis

1°)
$\diamond$ Notons S l'ensemble des surjections de $\mathbb{N}_n$ sur $\mathbb{N}_m$ et notons P l'ensemble des partitions ordonnées de $\mathbb{N}_n$ en m classes.
Soit $f \in S$. Pour tout $x, y \in \mathbb{N}_n$, convenons que $x \ R \ y$ si et seulement si $f(x) = f(y)$. D'après l'exemple canonique du cours, R est une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}_n$, donc ses classes d'équivalence constituent une partition de $\mathbb{N}_n$. Or la classe d'équivalence de x est $f^{-1}(\{f(x)\})$. f étant surjective, $\mathbb{N}_n/R = \{f^{-1}(\{i\})/i \in \mathbb{N}_m\}$. Ainsi, si l'on pose $\varphi(f) = (f^{-1}(\{1\}), \ldots, f^{-1}(\{m\}))$, on définit une application de S dans P.
$\diamond$ Montrons que φ est bijective.
Soit $f, g \in S$ telles que $\varphi(f) = \varphi(g)$.
Soit $x \in \mathbb{N}_n$. $x \in f^{-1}(\{f(x)\}) = g^{-1}(\{f(x)\})$, donc $g(x) = f(x)$. Ainsi, $f = g$. Ceci prouve que φ est injective.
Soit $A = (A_1, \ldots, A_m) \in P$. Si $x \in \mathbb{N}_n$, il existe un unique $i \in \mathbb{N}_m$ tel que $x \in A_i$. On peut donc poser $i = f(x)$. Ceci définit une application f de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_m$, surjective car chaque A_i est non vide. Pour tout $i \in \mathbb{N}_m$, par définition de f,
$f^{-1}(\{i\}) = \{x \in \mathbb{N}_n / f(x) = i\} = A_i$, donc $\varphi(f) = A$, ce qui prouve que φ est surjective.
$\diamond$ Notons P' l'ensemble des partitions de $\mathbb{N}_n$ en m classes. Notons Ψ l'application de P dans P' définie par $\Psi(A_1, \ldots, A_m) = \{A_1, \ldots, A_m\}$.
Soit $E = \{A_1, \ldots, A_m\} \in P'$ et $B = (B_1, \ldots, B_m) \in P$. $A_1, \ldots, A_m$ sont deux à deux distincts, ainsi que $B_1, \ldots, B_m$, donc $\varphi(B) = E \Longleftrightarrow [\exists \sigma \in \mathcal{S}_m, \ \forall i \in \mathbb{N}_m, \ B_i = A_{\sigma(i)}]$.
On en déduit que $|\Psi^{-1}(E)| = |\mathcal{S}_m| = m!$, donc d'après le principe des bergers,
$|P| = m!|P'|$.
En conclusion, le nombre de surjections de $\mathbb{N}_n$ sur $\mathbb{N}_m$ est égal à $|S| = m!S_n^m$.

2°) D'après le cours, $|\mathbb{N}_m^{\mathbb{N}_n}| = m^n$. D'autre part, pour construire une application quelconque f de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_m$, on peut choisir le nombre $k \in \{1, \ldots, m\}$ de valeurs atteintes par f dans $\mathbb{N}_m$, puis l'ensemble A de ces valeurs atteintes, ce qui revient à choisir k éléments parmi m ($\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix}$ choix), puis on choisit f parmi les surjections de $\mathbb{N}_n$ dans A, au nombre de $k!S_n^k$ d'après la question précédente. Ainsi, $m^n = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} (k!S_n^k)$.

3°) a) Pour tout $f \in {\mathbb{N}_n}^{\mathbb{N}_m}$,
$f \in E_{k_1} \cap \cdots \cap E_{k_\ell} \Longleftrightarrow \forall j \in \mathbb{N}_\ell,\ k_j \notin f(\mathbb{N}_n) \Longleftrightarrow f(\mathbb{N}_n) \subset \mathbb{N}_m \setminus \{k_1, \ldots, k_\ell\}$, donc $E_{k_1} \cap \cdots \cap E_{k_\ell}$ est exactement l'ensemble des applications de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_m \setminus \{k_1, \ldots, k_\ell\}$. Ainsi, d'après le cours, $|E_{k_1} \cap \cdots \cap E_{k_\ell}| = (m-\ell)^n$.

b)

$\diamond$ Formule du crible : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $R(n)$ l'assertion suivante : pour toute famille $(F_1, \ldots, F_n)$ de n ensembles finis, $|\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} F_k| = \sum_{A \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}_n)\setminus\{\emptyset\}} (-1)^{|A|+1} |\bigcap_{i \in A} F_i|$.

Lorsque $n = 1$, $\mathcal{P}(\mathbb{N}_1) \setminus \{\emptyset\} = \{1\}$, donc $R(1)$ se résume à $|F_1| = |F_1|$.

Lorsque $n = 2$, $R(2)$ est une formule du cours : $|F_1 \cup F_2| = |F_1| + |F_2| - |F_1 \cap F_2|$.

Supposons $R(n)$ (et $n \geq 2$) et montrons $R(n+1)$. Soit $(F_1, \ldots, F_{n+1})$ une famille de $n+1$ ensembles finis. $|\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n+1} F_k| = |F_{n+1} \cup \bigcup_{k=1}^{n} F_k|$ donc d'après $R(2)$,

$$|\bigcup_{k=1}^{n+1} F_k| = |\bigcup_{k=1}^{n} F_k| + |F_{n+1}| - |F_{n+1} \cap \bigcup_{k=1}^{n} F_k| = |\bigcup_{k=1}^{n} F_k| + |F_{n+1}| - |\bigcup_{k=1}^{n} (F_{n+1} \cap F_k)|,$$

donc d'après $R(n)$ appliqué deux fois,

$$\begin{aligned}
|\bigcup_{k=1}^{n+1} F_k| &= \sum_{A \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}_n)\setminus\{\emptyset\}} (-1)^{|A|+1} |\bigcap_{i \in A} F_i| + |F_{n+1}| - \sum_{A \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}_n)\setminus\{\emptyset\}} (-1)^{|A|+1} |\bigcap_{i \in A} (F_i \cap F_{n+1})| \\
&= \sum_{\substack{A \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}_{n+1})\setminus\{\emptyset\} \\ n+1 \notin A}} (-1)^{|A|+1} |\bigcap_{i \in A} F_i| + \sum_{\substack{A \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}_{n+1})\setminus\{\emptyset\} \\ n+1 \in A}} (-1)^{|A|+1} |\bigcap_{i \in A} F_i| \\
&= \sum_{A \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}_{n+1})\setminus\{\emptyset\}} (-1)^{|A|+1} |\bigcap_{i \in A} F_i|,
\end{aligned}$$

ce qui prouve $R(n+1)$.

$\diamond$ f n'est pas une surjection de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_m$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{N}_m$ tel que $k \notin f(\mathbb{N}_n)$, donc l'ensemble des surjections de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_m$ est égal à $\mathbb{N}_m^{\mathbb{N}_n} \setminus \displaystyle\bigcup_{k \in \mathbb{N}_m} E_k$.

Ainsi, d'après la formule du crible ,

$$\begin{aligned}
m! S_n^m &= m^n - |\bigcup_{k \in \mathbb{N}_m} E_k| \\
&= m^n - \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq m} |E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k}| \\
&= m^n - \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq m} (m-k)^n \\
&= m^n - \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} (m-k)^n |\{(i_1, \ldots, i_k) \in \mathbb{N}^k / 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq m\}|,
\end{aligned}$$

donc $m! S_n^m = m^n + \displaystyle\sum_{k=1}^{m} (-1)^k (m-k)^n \binom{m}{k} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k (m-k)^n \binom{m}{k}$.

Partie II : Formule d'inversion de Möbius

4°) Soit $f, g \in A$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Notons $E_1 = \{d \in \mathbb{N}_n / d \mid n\}$ et $E_2 = \{(d, d') \in \mathbb{N}_n^2 / dd' = n\}$. L'application φ de E_1 dans E_2 définie par $\varphi(d) = (d, \frac{n}{d})$ est une bijection, dont l'application réciproque est $(d, d') \longmapsto d$. Pour tout $(d, d') \in E_2$, posons $a_{(d,d')} = f(d)g(d')$.
Ainsi, $(f\ T\ g)(n) = \sum\limits_{\substack{1 \leq d \leq n \\ d \text{ divise } n}} a_{(d, \frac{n}{d})} = \sum\limits_{d \in E_1} a_{\varphi(d)}$, donc en posant $c = \varphi(d)$, on obtient que
$(f\ T\ g)(n) = \sum\limits_{c \in E_2} a_c = \sum\limits_{\substack{1 \leq d, d' \leq n \\ dd' = n}} f(d)g(d')$.

5°)
◇ $(f\ T\ g)(n) = \sum\limits_{\substack{1 \leq d, d' \leq n \\ dd' = n}} f(d)g(d')$, donc en posant $(e, e') = (d', d)$, on obtient
$(f\ T\ g)(n) = \sum\limits_{\substack{1 \leq e', e \leq n \\ e'e = n}} f(e')g(e)$, puis en renommant les variables,
$(f\ T\ g)(n) = \sum\limits_{\substack{1 \leq d', d \leq n \\ dd' = n}} f(d')g(d) = (g\ T\ f)(n)$. Ainsi, $f\ T\ g = g\ T\ f$, donc T est une loi interne commutative sur A.
◇ Notons $e : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ l'unique application telle que $e(1) = 1$ et $e(n) = 0$ pour tout $n \geq 2$. Soit $f \in A$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
$(f\ T\ e)(n) = \sum\limits_{\substack{1 \leq d, d' \leq n \\ dd' = n}} f(d)e(d') = f(n)e(1) = f(n)$, donc $f\ T\ e = f = e\ T\ f$.
Ainsi e est l'élément neutre pour la loi T.
◇ Il reste à montrer que T est associative. Soit $f, g, h \in A$, soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
[f\ T\ (g\ T\ h)](n) &= \sum_{\substack{1 \leq d, d' \leq n \\ dd' = n}} f(d)(g\ T\ h)(d') \\
&= \sum_{\substack{1 \leq d, d' \leq n \\ dd' = n}} f(d) \sum_{\substack{1 \leq \alpha, \beta \leq d' \\ \alpha\beta = d'}} g(\alpha)h(\beta) \\
&= \sum_{\substack{1 \leq d, d', \alpha, \beta \leq n \\ dd' = n, \alpha\beta = d'}} f(d)g(\alpha)h(\beta) \quad \text{(par sommation par paquets).}
\end{aligned}$$

Posons $F_1 = \{(d, d', \alpha, \beta) \in \mathbb{N}_n^4 / dd' = n, \alpha\beta = d'\}$ et $F_2 = \{(d, \alpha, \beta) \in \mathbb{N}_n^3 / d\alpha\beta = n\}$. L'application φ de F_1 dans F_2 définie par $\varphi(d, d', \alpha, \beta) = (d, \alpha, \beta)$ est une bijection, donc en posant $a_{(d,\alpha,\beta)} = f(d)g(\alpha)h(\beta)$ pour tout $(d, \alpha, \beta) \in F_2$, on obtient
$[f\ T\ (g\ T\ h)](n) = \sum\limits_{(d,d',\alpha,\beta) \in F_1} a_{\varphi(d,d',\alpha,\beta)} = \sum\limits_{c \in F_2} a_c$.
Ceci montre que $[f\ T\ (g\ T\ h)](n) = \sum\limits_{\substack{1 \leq d, d', d'' \leq n \\ dd'd'' = n}} f(d)g(d')h(d'')$.
Ainsi $f\ T\ (g\ T\ h)$ ne dépend pas de l'ordre de (f, g, h).

En particulier, $f\ T\ (g\ T\ h) = h\ T\ (f\ T\ g)$, puis par commutativité,
$f\ T\ (g\ T\ h) = (f\ T\ g)\ T\ h$. Ceci prouve l'associativité.

6°) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 2$.

Soit d un diviseur de n. Ainsi, il existe $\beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{N}$ tels que $d = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i}$ avec $\beta_i \leq \alpha_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}_k$. S'il existe $i \in \mathbb{N}_k$ tel que $\beta_i \geq 2$, alors $\mu(d) = 0$, donc les seuls diviseurs d de n pour lesquels $\mu(d) \neq 0$ sont de la forme $d = \prod_{i \in I} p_i$, où $I \subset \mathbb{N}_k$, et dans ce cas, $\mu(d) = (-1)^{|I|}$.
L'application $I \longmapsto \prod_{i \in I} p_i$ est donc une bijection de $\mathcal{P}(\mathbb{N}_k)$ dans l'ensemble des diviseurs d de n tels que $\mu(d) \neq 0$. Ainsi, par changement de variable,
$(\mu\ T\ z)(n) = \sum_{\substack{1 \leq d \leq n \\ d\ |\ n}} \mu(d) = \sum_{I \subset \mathbb{N}_k} (-1)^{|I|}$, puis par sommation par paquets,

$(\mu\ T\ z)(n) = \sum_{h=0}^{k} \sum_{\substack{I \subset \mathbb{N}_k \\ |I|=h}} (-1)^h = \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} (-1)^h = (1-1)^k$ d'après la formule du binôme de Newton. Or $k \geq 1$, car $n \geq 2$, donc $(\mu\ T\ z)(n) = 0$.
De plus $(\mu\ T\ z)(1) = \mu(1)z(1) = 1$, donc $\mu\ T\ z = e$.
T étant commutative, ceci prouve que z est l'inverse de μ pour la loi T.
b) Soit $f, g \in A$. Il s'agit de montrer que $f = g\ T\ z \Longleftrightarrow g = \mu\ T\ f$:
Si $f = g\ T\ z$, alors $\mu\ T\ f = \mu\ T\ (z\ T\ g) = (\mu\ T\ z)\ Tg = e\ T\ g = g$ et réciproquement, si $g = \mu\ T\ f$, alors $g\ T\ z = (f\ T\ \mu)\ T\ z = f\ T\ (\mu\ T\ z) = f\ T\ e = f$.

7°) a) $\diamond$ Soit φ un mot de longueur n. Alors pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $\varphi(i+n) = \varphi(i)$, donc $\varphi\ R\ \varphi$: R est une relation réflexive.
$\diamond$ Soit φ et φ' deux mots de longueur n tels que $\varphi\ R\ \varphi'$. Ainsi, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $\varphi'(i) = \varphi(i+p)$.
Il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $-p \equiv q\ [n]$. Alors, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $\varphi(i) = \varphi'(i-p) = \varphi'(i+q)$, donc $\varphi'\ R\ \varphi$: R est une relation symétrique.
$\diamond$ Soit φ, φ' et φ'' trois mots de longueur n tels que $\varphi\ R\ \varphi'$ et $\varphi'\ R\ \varphi''$. Il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $\varphi'(i) = \varphi(i+p)$ et $\varphi''(i) = \varphi'(i+q)$. Alors, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $\varphi''(i) = \varphi(i+q+p)$, donc $\varphi\ R\ \varphi''$: R est une relation transitive.
$\diamond$ En conclusion, R est une relation d'équivalence.

b) $\diamond$ Lors de la définition d'une période p d'un mot circulaire $\overline{\varphi}$, l'énoncé sous-entend que la propriété "$\forall i \in \mathbb{N}_n,\ \ \varphi(i) = \varphi(i+p)$" ne dépend que de $\overline{\varphi}$. Démontrons-le :
Soit φ, φ' deux mots de longueur n tels que $\varphi R \varphi'$: il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $\varphi'(i) = \varphi(i+q)$.
Supposons de plus qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $\varphi(i) = \varphi(i+p)$.
Alors, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $\varphi'(i) = \varphi(i+q) = \varphi(i+q+p) = \varphi'(i+p)$, ce qui fallait démontrer.

◇ Notons P l'ensemble des périodes de φ. D'après les définitions de l'énoncé, $n \in P$, donc P est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$. À ce titre, elle possède bien un minimum, que l'on note p_0.
◇ Par division euclidienne de n par p_0, on peut écrire $n = p_0q + r$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $0 \leq r < p_0$.
Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $\varphi(i) = \varphi(i+n) = \varphi(i+r+p_0q) = \varphi(i+r)$, car on peut montrer par récurrence sur q que, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, p_0q est une période. Ainsi, si r est non nul, c'est un élément de P avec $r < p_0 = \min(P)$. C'est impossible, donc $r = 0$ et p_0 divise n.

c) Notons $\mathcal{M}_{p,n}$ l'ensemble des mots circulaires de longueur n et de période primitive p. Alors on peut vérifier que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,n} & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,p} \\ \overline{\varphi} & \longmapsto & \overline{\varphi|_{\mathbb{N}_p}} \end{array}$ est correctement définie et que c'est une bijection. Ainsi, le nombre de mots circulaires de longueur n et de période primitive p ne dépend pas de n, tant que n est un multiple de p. On peut donc le noter $M(p)$, et $M \in A$.
Notons $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie par $f(n) = m^n$ et $g : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie par $g(p) = pM(p)$. Il s'agit donc de montrer que $g = \mu\ T\ f$, ou bien d'après la question 6.b, que $f = g\ T\ z$, c'est-à-dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $m^n = \sum_{\substack{1 \leq d \leq n \\ d \mid n}} dM(d)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $d \mid n$, notons $M_{d,n}$ l'ensemble des éléments de ${\mathbb{N}_m}^{\mathbb{N}_n}$ dont le mot circulaire associé admet d pour période primitive.
Alors (1) : ${\mathbb{N}_m}^{\mathbb{N}_n} = \bigsqcup_{\substack{1 \leq d \leq n \\ d \mid n}} M_{d,n}$.
Par ailleurs, si l'on note F l'application $\begin{array}{ccc} M_{d,n} & \longrightarrow & \mathcal{M}_{d,n} \\ \varphi & \longmapsto & \overline{\varphi} \end{array}$, pour tout $r \in \mathcal{M}_{d,n}$, $F^{-1}(\{r\})$ est de cardinal d : en effet, si $\overline{\varphi} = r$, les mots de la classe d'équivalence sont les $\varphi_k : i \longmapsto \varphi(i+k)$, où $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, mais $\varphi_k = \varphi_h$ avec $k \neq h$ si et seulement si $|k-h|$ est une période de $\overline{\varphi}$, donc $\overline{\varphi} = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{d-1}\}$ et ces éléments sont deux à deux distincts.
Ainsi, d'après le principe des bergers, $|M_{d,n}| = d|\mathcal{M}_{d,n}| = dM(d)$. Alors la formule (1) donne, en passant aux cardinaux, $m^n = \sum_{\substack{1 \leq d \leq n \\ d \mid n}} dM(d)$, ce qu'il fallait démontrer.

Partie III : Utilisation de fonctions génératrices

8°) Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 3.b,

$$\sum_{n=0}^{N} S_n^m \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{m!}\sum_{n=0}^{N}\frac{x^n}{n!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \binom{m}{k}(m-k)^n = \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \binom{m}{k}\sum_{n=0}^{N}\frac{[x(m-k)]^n}{n!},$$

donc

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} S_n^m \frac{x^n}{n!} &\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \binom{m}{k} e^{x(m-k)} \\ &= \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \binom{m}{k} (e^x)^{m-k} \\ &= \frac{1}{m!}(e^x-1)^m\end{aligned}$$

d'après la formule du binôme de Newton. Ceci prouve que la série $\sum S_n^m \frac{x^n}{n!}$ est convergente et que $\sum_{n=0}^{+\infty} S_n^m \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{m!}(e^x-1)^m$.

9°) Soit $n \geq 3$. Notons $\mathcal{I}_n$ l'ensemble des injections de $\mathbb{N}_n$. Alors
(2) : $\mathcal{I}_n = \bigsqcup_{1\leq i\leq n} \mathcal{I}_{i,n}$ où $\mathcal{I}_{i,n} = \{f \in \mathcal{I}_n / f(n) = i\}$.

Lorsque $i = n$, pour construire une involution f de $\mathcal{I}_{n,n}$, telle que $f(n) = n$, il suffit de construire sa restriction à $\mathbb{N}_{n-1}$ qui est une involution de $\mathcal{I}_{n-1}$, donc $|\mathcal{I}_{n,n}| = I_{n-1}$.
Lorsque $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, pour construire une involution f de $\mathcal{I}_{i,n}$, telle que $f(n) = i$ et donc $f(i) = n$, il suffit de construire sa restriction à $\mathbb{N}_{n-1} \setminus \{i\}$ qui est une involution sur un ensemble de cardinal $n-2$, donc $|\mathcal{I}_{i,n}| = I_{n-2}$. Ainsi, en passant aux cardinaux dans la formule (2), on obtient que $I_n = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}$.

10°) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après l'énoncé, $f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \frac{d^n}{dx^n}(x^k) = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k \frac{k!}{(k-n)!}x^{k-n}$, donc $f^{(n)}(0) = n!a_n$.

11°) Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des involutions de $\mathbb{N}_n$ est inclus dans l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des permutations de $\mathbb{N}_n$, donc $I_n \leq |\mathcal{S}_n| = n!$.

Soit $r \in]0,1[$. Soit $N \in \mathbb{N}$. $\sum_{n=0}^{N} \frac{I_n}{n!}r^n \leq \sum_{n=0}^{N} r^n = \frac{1-r^{N+1}}{1-r} \leq \frac{1}{1-r}$, donc la suite $\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{I_n}{n!}r^n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est une suite majorée, mais elle est aussi croissante car $\frac{I_n}{n!}r^n \geq 0$, donc elle est convergente, ce qui prouve que $S(r)$ est défini.

12°) Soit $x \in]-1,1[$. Il existe $r \in]|x|,1[$. D'après la question précédente, $S(r)$ est défini, donc d'après la question 10, l'application S est de classe C^∞ sur $]-r,r[$. En particulier, S est dérivable en x et, toujours d'après la question 10,

$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} \frac{d}{dx}(x^n) = \sum_{n=1}^{+\infty} I_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} I_{n+1} \frac{x^n}{n!}$, donc

$S'(x) = I_1 + I_2 x + \sum_{n=2}^{+\infty} (I_n + nI_{n-1}) \frac{x^n}{n!} = I_1 + I_2 x + \sum_{n=2}^{+\infty} I_n \frac{x^n}{n!} + x \sum_{n=1}^{+\infty} I_n \frac{x^n}{n!}$, or $I_1 = 1$ et $I_2 = 2$, donc $S'(x) = 1+2x+(S(x)-x)+xS(x) = (1+x)+S(x)(1+x) = (1+x)(S(x)+1)$.

13°) Notons $g \ : \ x \longmapsto (S(x)+1)e^{-x-\frac{x^2}{2}}$. g est dérivable sur $]-1,1[$ et $g'(x) = e^{-x-\frac{x^2}{2}}(S'(x) + (S(x)+1)(-1-x)) = 0$, donc g est une application constante sur $]-1,1[$. Or $g(0) = 1$, donc pour tout $x \in]-1,1[$, $S(x) = e^{x+\frac{x^2}{2}} - 1$.

14°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $x \in]-1,1[$, $e^{x+\frac{x^2}{2}} - 1 = S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$, donc d'après la question 10, $I_n = S^{(n)}(0)$, puis d'après la formule de Leibniz,

$I_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(e^x) \times \frac{d^k}{dx^k}(e^{\frac{x^2}{2}}) \right](0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\frac{d^k}{dx^k}(e^{\frac{x^2}{2}}) \right](0)$.

Par ailleurs, $e^{\frac{x^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\frac{x^2}{2}\Big)^n \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, avec $a_{2n} = \frac{1}{2^n n!}$ et $a_{2n+1} = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, toujours d'après la question 10, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left[\frac{d^k}{dx^k}(e^{\frac{x^2}{2}}) \right](0) = k! a_k$,

donc $I_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (2k)! \frac{1}{2^k k!} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n!}{2^k k!(n-2k)!}$.