DM 12

Problème 1 : Dénombrement et séries entières

Partie I : Un résultat sur les séries entières

Dans cette partie, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de réels. On suppose que,

pour tout $x \in]-1, 0[$, la série $\sum a_n x^n$ est convergente et on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1°) Montrer que cette hypothèse est vérifiée et déterminer $S(x)$ dans les cas suivants :
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \ a_n = 1$;
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{3n} = 1$ et $a_{3n+1} = a_{3n+2} = 0$;
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{1}{n+1}$.

2°) Pour tout $x \in]-1, 0[$, montrer que la suite $(a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

3°) Soit $x \in]-1, 0[$. En écrivant $x^n = (\frac{x}{y})^n y^n$,
montrer que l'application $S|_{[x,0[}$ est bornée (sur $[x, 0[$).

4°) Montrer que $S(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} a_0$.

5°) On prolonge S en 0 en posant $S(0) = a_0$.
Montrer que S est dérivable en 0.

6°) Montrer que $(\forall x \in]-1, 0[,\ \ S(x) = 0) \Longleftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N},\ \ a_n = 0)$.

Partie II : Application au dénombrement

Lorsque $n \in \mathbb{N}$ et $p, q \in \mathbb{N}^*$, on note $B_q(n, p)$ le cardinal de l'ensemble

$$\Big\{(n_1, \ldots, n_p) \in ([0, q] \cap \mathbb{N})^p \ /\ \sum_{i=1}^{p} n_i = n\Big\}.$$

7°) Que vaut $B_q(n, p)$ lorsque $n > pq$?

8°) Lorsque $q \geq n$, montrer que $B_q(n, p) = \dbinom{n+p-1}{n}$.

Pour toute la suite de ce problème, on fixe $p, q \in \mathbb{N}^*$.

9°) On note A le polynôme $A(X) = \sum_{i=0}^{q} X^i$. Montrer que $[A(X)]^p = \sum_{n \geq 0} B_q(n,p) X^n$.

10°) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_q(n, p+1) = \sum_{i=0}^{\min(q,n)} B_q(n-i, p)$.

11°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer la dérivée n-ième de $x \longmapsto \dfrac{1}{(1-x)^p}$.

En déduire que, pour tout $x \in]-1, 0[$, $\dfrac{1}{(1-x)^p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{p+n-1}{n} x^n$.

12°) Montrer que, pour tout $x \in]-1, 0[$,

$[A(x)]^p = \left(\sum_{h=0}^{p} \binom{p}{h} (-1)^h x^{h(q+1)} \right) \times \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \binom{m+p-1}{m} x^m \right)$, puis que

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_q(n,p) = \sum_{h=0}^{\min(p, \lfloor \frac{n}{q+1} \rfloor)} \binom{p}{h} (-1)^h \binom{n - h(q+1) + p - 1}{p-1}$.

Problème 2 : Séries de Fourier

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ que l'on suppose continue et 2π-périodique.

Partie 1 : Les coefficients de Fourier

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t) e^{-int}\, dt$,

et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n(f) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt)\, dt$ et $b_n(f) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt)\, dt$.
Ces quantités sont appelées les coefficients de Fourier de f.

1°) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $c_n(f)$ et $c_{-n}(f)$ en fonction de $a_n(f)$ et de $b_n(f)$.
Exprimer $a_n(f)$ et $b_n(f)$ en fonction de $c_n(f)$ et de $c_{-n}(f)$.

2°) Pour cette question, on suppose que f est l'unique application 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in [-\pi, \pi[$, $f(x) = x^2 - \pi^2$. On admettra qu'elle est bien continue sur $\mathbb{R}$.
Calculer les coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$ de f.

3°) Montrer que les suites $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et la famille $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ sont bornées. Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = f(t+a)$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, exprimer $c_n(g)$ en fonction de $c_n(f)$, n et a.

4°) Soit g une application à valeurs dans $\mathbb{C}$, de classe C^1, définie sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ où $a < b$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b g(t)e^{int}\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Pour toute la suite, **on admettra que ce résultat est encore valable lorsque** g **est seulement continue.**

5°) Montrer que $c_n(f)$, $c_{-n}(f)$, $a_n(f)$ et $b_n(f)$ tendent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Lorsque f est de classe C^∞, montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $n^k c_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Partie II : Le théorème de Dirichlet

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $D_n(t) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$.

6°) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\sin\left(\dfrac{2n+1}{2}t\right) = D_n(t)\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose $S_n(f)(t) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikt}$.

7°) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que $2\pi S_n(f)(t_0) = \displaystyle\int_0^\pi (f(t_0-t)+f(t_0+t))D_n(t)\,dt$.

8°) On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On fixe $t_0 \in \mathbb{R}$.
Pour tout $t \in]0,\pi]$, on pose $\alpha(t) = \dfrac{f(t_0+t) - 2f(t_0) + f(t_0-t)}{\sin(\frac{t}{2})}$.
Montrer que $\alpha(t)$ possède une limite, que l'on précisera, lorsque t tend vers 0.
En déduire que $S_n(f)(t_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(t_0)$.

9°) Lorsque f est dérivable, montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)\Big).$$

10°) À l'aide de la question 2, déterminer les valeurs de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.