Résumé de cours :
Semaine 11, du 27 novembre au 1er décembre.

Les complexes (fin)

1 L'exponentielle complexe (suite)

Propriété. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a^2 + b^2 = 1$.
Il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$.

Corollaire. Soit $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ tels que $\cos \theta = \cos \varphi$ et $\sin \theta = \sin \varphi$. Alors $\theta \equiv \varphi [2\pi]$.

Paramétrage du cercle unité : l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ t & \longmapsto & e^{it} \end{array}$ est périodique et sa plus petite période est 2π . Sa restriction à $[0, 2\pi[$ est bijective.

Définition. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $\begin{array}{ccc} M : [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & M(t) \end{array}$ une application de classe C^1 .
Notons $C = \{M(t)/t \in [a, b]\}$: C est une courbe dans le plan complexe, dont l'application M est un paramétrage. Par définition, la longueur de C est égale à $\int_a^b |M'(t)| dt$.

Propriété. Soit $\theta \in [0, 2\pi]$. Notons $C_\theta = \{e^{it}/t \in [0, \theta]\}$: C_θ est une portion du cercle unité. Sa longueur est égale à θ .

2 Arguments d'un complexe

Propriété. Si $z = a + ib$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $e^z = e^a(\cos(b) + i \sin(b))$.

Définition. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $\rho, \theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = \rho e^{i\theta}$. On dit alors que (ρ, θ) est un couple de coordonnées polaires du point $M(z)$ (l'image du complexe z).

On peut imposer $\rho \geq 0$. Dans ce cas, $\rho = |z|$. On dit alors que θ est un argument de z et l'on note $\theta = \arg(z)$.

Lorsque $z \neq 0$, on peut imposer $\rho > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$. Dans ce cas, le couple (ρ, θ) est unique.

Définition. Un complexe z possède ainsi deux écritures usuelles :

- l'écriture algébrique : $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, ou bien $z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)$;
- l'écriture trigonométrique (ou exponentielle, ou polaire) : $z = \rho e^{i\theta}$, avec $\rho \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Les relations suivantes font le lien entre ces deux écritures :

lorsque $z = a + ib = \rho e^{i\theta}$ avec $a, b, \rho, \theta \in \mathbb{R}$ et $\rho \geq 0$,

- $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$;
- lorsque $z \neq 0$, $\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$;
- Lorsque $a \neq 0$, $\tan \theta = \frac{b}{a}$;

- Lorsque $z \neq 0$ et $\theta \in [0, \pi]$, $\theta = \arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$;
- Lorsque $z \neq 0$ et $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\theta = \arcsin\left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$;
- Lorsque $a \neq 0$ et $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$;
- Lorsque $z \neq 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$, $\theta = 2\arctan\left(\frac{b}{a + \sqrt{a^2 + b^2}}\right)$.

Il faut savoir le démontrer.

Propriétés de l'argument : Si z, z_1, z_2 sont trois complexes non nuls, alors

- $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) [2\pi]$;
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv \arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) [2\pi]$;
- $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2) [2\pi]$;
- pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\arg(z^n) \equiv n \arg(z) [2\pi]$;
- $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi [2\pi]$;
- $(\arg(z_1) \equiv \arg(z_2) [2\pi]) \iff \frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}_+^*$.

Remarque. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\arg(e^z) \equiv \text{Im}(z) [2\pi]$.

Interprétation géométrique du produit dans $\mathbb{C}$: Fixons $z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}$, où $\rho_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$.

La multiplication par z_0 , c'est-à-dire l'application $z \mapsto z z_0$ est la composée de $h : z \mapsto \rho_0 z$ avec $r : z \mapsto z e^{i\theta_0}$. h s'interprète géométriquement comme une homothétie de centre O et de rapport ρ_0 et r comme la rotation de centre O et d'angle θ_0 .

Propriété. Soit $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z = \rho e^{i\theta} \iff (\exists k \in \mathbb{Z}, z = \ln(\rho) + i\theta + 2ik\pi)$.

En particulier, l'application exponentielle $\begin{matrix} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & e^z \end{matrix}$ est surjective et $2i\pi$ périodique.

Il faut savoir le démontrer.

Formule de Moivre : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, $e^{int} = (\cos t + i \sin t)^n$.

Propriété. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\frac{d}{dt}(e^{zt}) = z e^{zt}$.

Définition. Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note $x^\alpha \triangleq e^{\alpha \ln x}$.

Propriété. Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $\frac{d}{dt}(t^\alpha) = \alpha t^{\alpha-1}$.

Technique de l'angle moyen : $e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} (e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{i\frac{-\alpha+\beta}{2}}) = 2e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

et $e^{i\alpha} - e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} (e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} - e^{i\frac{-\alpha+\beta}{2}}) = 2ie^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

Technique à connaître.

3 Linéarisation

Définition. Linéariser une expression trigonométrique, c'est transformer un produit de quantités en sin et cos en une somme de sin ou cos. Une méthode de linéarisation consiste à suivre les étapes suivantes :

- On remplace chaque occurrence en cos ou sin par son expression issue des formules d'Euler ;
- On développe les différents produits qui apparaissent alors ;
- On regroupe les différents termes à l'aide des formules d'Euler pour faire apparaître une somme de cos et de sin.

4 Antilinéarisation

Exercice. Il faut savoir le démontrer.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme T_n tel que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$. T_n est appelé le n -ième polynôme de Tchebychev de première espèce.

5 Équations polynomiales

5.1 Racines n -ièmes d'un complexe

Les racines n -ièmes de $a \in \mathbb{C}^*$ sont les solutions de l'équation $z^n = a$ en l'inconnue $z \in \mathbb{C}^*$.

Posons $a = re^{i\varphi}$. Alors, en notant $z_0 = r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\varphi}{n}}$ on a $z_0^n = a$. Ainsi,

$$z^n = a \iff z^n = z_0^n \iff \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1 \iff \frac{z}{z_0} \in \mathbb{U}_n \iff (\exists k \in \{0, \dots, n-1\}, z = r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{2k\pi + \varphi}{n}}).$$

a possède donc exactement n racines n -ièmes, disposées selon un polygone régulier à n côtés, inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $|a|^{\frac{1}{n}}$.

5.2 Équations du second degré

5.2.1 Racines carrées

$a = re^{i\varphi}$ (avec $r > 0$) possède exactement deux racines carrées égales à $\pm\sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}$.

Lorsque $a = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, on peut déterminer les racines carrées de a selon le procédé suivant :

$$\text{Si } z = \alpha + i\beta, \text{ alors } z^2 = a \iff \begin{cases} x &= \alpha^2 - \beta^2 \\ \sqrt{x^2 + y^2} &= \alpha^2 + \beta^2 \\ \text{sgn}(y) &= \text{sgn}(\alpha\beta) \end{cases}.$$

Technique à connaître.

5.2.2 Racines d'un trinôme

Formule : Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ sont $\frac{-b \pm \delta}{2a}$, où δ est une racine carrée du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

Ces deux racines sont égales si et seulement si $\Delta = 0$. Dans ce cas, l'unique racine vaut $\frac{-b}{2a}$. On dit que c'est une racine double.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Notons z_1 et z_2 les deux racines (éventuellement égales à une racine double) du trinôme $aX^2 + bX + c$. Alors
$$\boxed{z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} \text{ et } z_1 z_2 = \frac{c}{a}}.$$

Propriété. Soit $s, p \in \mathbb{C}$.

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases} \text{ si et seulement si } \{z_1, z_2\} \text{ est l'ensemble des racines du trinôme } X^2 - sX + p.$$

Propriété. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$,

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}) \text{ et } X^{n-1} + \dots + X + 1 = \prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}).$$

6 Géométrie du plan complexe

6.1 Distances et angles

Propriété. Soit A, B, C trois points du plan usuel, d'affixes respectifs $a, b, c \in \mathbb{C}$.

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est d'affixe $b - a$;
- La distance AB entre A et B est égale à $|b - a|$;
- L'angle orienté $(\widehat{CA}, \widehat{CB})$ vérifie $(\widehat{CA}, \widehat{CB}) \equiv \arg\left(\frac{b - c}{a - c}\right) [2\pi]$.

Il faut savoir démontrer la dernière propriété.

6.2 Orthogonalité et colinéarité

Propriété. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls d'affixes $u = a + ib$ et $v = c + id$.

- $\vec{u} // \vec{v} \iff \frac{u}{v} \in \mathbb{R} \iff \text{Im}(\bar{u}v) = 0 \iff ad - bc \stackrel{\Delta}{=} \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \stackrel{\Delta}{=} \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.
 $\det(\vec{u}, \vec{v})$ est le déterminant (aussi appelé le produit mixte) des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \frac{u}{v} \in i\mathbb{R} \iff \text{Re}(\bar{u}v) = 0 \iff ac + bd \stackrel{\Delta}{=} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.
 $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ est le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Il faut savoir le démontrer.

Corollaire. Soit A, B, C trois points du plan usuel, d'affixes respectifs $a, b, c \in \mathbb{C}$.

- (A, B et C sont alignés) $\iff \frac{a - b}{c - b} \in \mathbb{R} \iff \text{Im}(\overline{(a - b)}(c - b)) = 0$, c'est-à-dire
 $C \in (AB) \iff \arg(c - a) \equiv \arg(b - a) [\pi] \iff (\exists t \in \mathbb{R}, c = (1 - t)a + tb)$.
- (Le triangle ABC est rectangle en B) $\iff \frac{a - b}{c - b} \in i\mathbb{R} \iff \text{Re}(\overline{(a - b)}(c - b)) = 0$.

6.3 Équation d'un cercle

Notons C le cercle de centre $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$ et de rayon $r > 0$. Alors

$$z = x + iy \in C \iff |z - \alpha| = r \iff (z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha}) = r^2 \iff x^2 + y^2 - 2ax - 2by = r^2 - a^2 - b^2.$$

Réciproquement, un ensemble admettant une équation cartésienne de la forme

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = c \text{ est un cercle éventuellement réduit à un point ou à l'ensemble vide.}$$

6.4 Les similitudes directes

Définition. Une application $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est une isométrie si et seulement si elle conserve les distances, c'est-à-dire si et seulement si, pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, $|f(z) - f(z')| = |z - z'|$.

Définition. La translation de vecteur $b \in \mathbb{C}$ est la transformation $t_b : z \mapsto z + b$. Elle est bijective, d'application réciproque t_{-b} , elle ne possède aucun point fixe lorsque $b \neq 0$, c'est une isométrie.

Définition. La rotation de centre $z_0 \in \mathbb{C}$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ est la transformation

$r_{z_0, \theta} : z \mapsto e^{i\theta}(z - z_0) + z_0$. Elle est bijective, d'application réciproque $r_{z_0, -\theta}$, elle admet z_0 comme unique point fixe lorsque $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, c'est une isométrie.

Définition. L'homothétie de centre $z_0 \in \mathbb{C}$ et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$ est la transformation

$h_{z_0, \lambda} : z \mapsto \lambda(z - z_0) + z_0$. Elle est bijective, d'application réciproque $h_{z_0, \frac{1}{\lambda}}$, elle admet z_0 comme unique point fixe lorsque $\lambda \neq 1$.

Définition. La similitude directe de centre $z_0 \in \mathbb{C}$, d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$ est $s_{z_0, \theta, \lambda} = h_{z_0, \lambda} \circ r_{z_0, \theta} = r_{z_0, \theta} \circ h_{z_0, \lambda} = z \mapsto \lambda e^{i\theta}(z - z_0) + z_0$. Elle est bijective, d'application réciproque $s_{z_0, -\theta, \frac{1}{\lambda}}$, elle admet z_0 comme unique point fixe lorsque $\lambda e^{i\theta} \neq 1$, elle conserve les proportions (pour

tout $z, z' \in \mathbb{C}$, en posant $s = s_{z_0, \theta, \lambda}$, $|s(z) - s(z')| = |\lambda||z - z'|$, elle conserve les angles (pour tout a, b, c deux à deux distincts, $\widehat{(s(a)s(b)), s(a)s(c))} = \widehat{(ab, ac)}$: **Il faut savoir le démontrer.**).

Définition. On dit que f est une similitude affine directe si et seulement si c'est une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $z \mapsto az + b$, où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Propriété. Soit $f : z \mapsto az + b$ une similitude directe.

Lorsque $a = 1$, c'est une translation.

Lorsque $a \neq 1$, f possède un unique point fixe $z_0 \in \mathbb{C}$ et f est la similitude directe de centre z_0 , d'angle $\arg(a)$ et de rapport $|a|$.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. L'ensemble S^+ des similitudes affines directes est un sous-groupe de $\mathcal{S}(\mathbb{C})$.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. L'application qui à la similitude $z \mapsto az + b$ associe a (resp : $|a|$) est un morphisme de groupes, dont le noyau est le sous-groupe des translations (resp : des rotations et des translations).

Corollaire. Une composée, quel que soit l'ordre, de translations, de rotations dont la somme des angles est égale à θ et d'homothéties dont le produit des rapports est égal à λ est une similitude directe de la forme $z \mapsto \lambda e^{i\theta} z + b$.

La structure de groupe

7 Définitions

Définition. $(G, \cdot)$ est un groupe si et seulement si G est muni d'une loi interne " $\cdot$ " qui vérifie

- l'associativité : pour tout $x, y, z \in G$, $x(yz) = (xy)z$;
- l'existence d'un élément neutre 1_G : pour tout $x \in G$, $1_G \cdot x = x \cdot 1_G = x$;
- l'existence, pour tout $x \in G$, d'un symétrique x^{-1} tel que : $xx^{-1} = x^{-1}x = 1_G$.

Définition. Pour un groupe, "commutatif" et "abélien" sont synonymes.

Notation. On utilise principalement deux notations pour désigner la loi interne d'un groupe :

◇ *Notation multiplicative* : dans un groupe $(G, \cdot)$, l'élément neutre est noté 1 ou 1_G , le symétrique de $x \in G$ est noté x^{-1} et si $x_1, \dots, x_n \in G$, on note $x_1 \times \dots \times x_n = \prod_{i=1}^n x_i$, en convenant que ce produit vaut 1_G lorsque $n = 0$ (produit vide).

◇ *Notation additive* : dans un groupe abélien $(G, +)$, l'élément neutre est noté 0 ou 0_G , le symétrique de $x \in G$ est noté $-x$ et si $x_1, \dots, x_n \in G$, on note $x_1 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^n x_i$, en convenant que cette somme vaut 0_G lorsque $n = 0$ (somme vide).

Définition. Si $(G, \cdot)$ est un groupe fini, le cardinal de G est appelé l'**ordre** de G .

8 Calculs dans un groupe

Propriété. Soit $(G, \cdot)$ un groupe et $a \in G$. Alors a est régulier (ou simplifiable) à gauche et à droite, c'est-à-dire que $\forall x, y \in G$, $[ax = ay \implies x = y]$ et $[xa = ya \implies x = y]$.

Propriété. Dans un groupe $(G, \cdot)$, $(x_1 \times \dots \times x_n)^{-1} = x_n^{-1} \times \dots \times x_1^{-1}$.

Propriété. Dans un groupe abélien $(G, +)$, on pose $x - y \triangleq x + (-y)$.

On dispose des formules : $x - (y + z) = x - y - z$ et $x - (y - z) = x - y + z$.

9 Construction de groupes

9.1 Groupe produit

Définition. Le groupe produit des n groupes $((G_i, \cdot))_{i \in \{1, \dots, n\}}$ est $(G, \cdot)$, où $G = G_1 \times \dots \times G_n$ et où la loi “ $\cdot$ ” est définie par : $(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) = (x_1 \cdot y_1, \dots, x_n \cdot y_n)$.

9.2 Le groupe symétrique

Propriété. Si E est un ensemble, alors l’ensemble des bijections de E dans E est un groupe pour la loi de composition. On l’appelle le groupe symétrique de E et on le note $\mathcal{S}(E)$. Son élément neutre est l’application identité Id_E et, pour tout $f \in \mathcal{S}(E)$, le symétrique de f est la bijection réciproque de f , dont la notation f^{-1} est en cohérence avec cette propriété.

10 Sous-groupes

10.1 Définition

Propriété et définition : Soit $(G, \cdot)$ un groupe et H une partie de G .

H est un groupe pour la restriction de la loi “ $\cdot$ ” à $H \times H$, avec le même élément neutre 1_G si et seulement si

- $H \neq \emptyset$;
- $\forall (x, y) \in H^2$, $xy \in H$ (stabilité du produit);
- $\forall x \in H$, $x^{-1} \in H$ (stabilité du symétrique).

Cet ensemble de conditions est équivalent à

- $H \neq \emptyset$;
- $\forall (x, y) \in H^2$, $xy^{-1} \in H$.

Dans ce cas, on dit que H est un *sous-groupe* de G .

Propriété de transitivité : Un sous-groupe d’un sous-groupe d’un groupe G est un sous-groupe de G .