DM 12 : un corrigé

Problème 1 : Dénombrement et séries entières

Partie I : Un résultat sur les séries entières

1°)
◇ Supposons que $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in]-1, 0[$.
Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1 - x}$, donc la série $\sum a_n x^n$ est bien convergente et $S(x) = \dfrac{1}{1 - x}$.
◇ On suppose maintenant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{3n} = 1$ et $a_{3n+1} = a_{3n+2} = 0$. Soit $x \in]-1, 0[$. Soit $N \in \mathbb{N}$. En partitionnant la somme selon la valeur modulo 3 des indices, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{N}{3} \rfloor} a_{3n} x^{3n} + \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{N-1}{3} \rfloor} a_{3n+1} x^{3n+1} + \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{N-2}{3} \rfloor} a_{3n+2} x^{3n+2}$, donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{N}{3} \rfloor} x^{3n} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1 - x^3}$, d'après le point précédent. Ainsi l'hypothèse est bien vérifiée et dans ce cas, $S(x) = \dfrac{1}{1 - x^3}$.
◇ On suppose enfin que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{1}{n+1}$. Soit $x \in]-1, 0[$. Soit $N \in \mathbb{N}$.
$\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n x^n = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x} \int_0^x \Big(\sum_{n=0}^{N} t^n \Big) dt = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1 - t^{N+1}}{1 - t} dt = -\frac{1}{x} \ln(1-x) + r_N(x)$,
où $r_N(x) = \dfrac{-1}{x} \displaystyle\int_0^x \frac{t^{N+1}}{1 - t} dt$. Or d'après l'inégalité triangulaire, en tenant compte du fait que $1 - t > 0$ et que $x < 0$, $|r_N(x)| \leq \dfrac{1}{|x|} \displaystyle\int_x^0 \frac{|x|^{N+1}}{1 - t} dt = |x|^N \ln(1 - x) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc d'après le principe des gendarmes, $r_N(x) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, puis $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n x^n \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{x} \ln(1 - x)$.
Ceci prouve que l'hypothèse de l'énoncé est bien vérifiée et que $S(x) = -\dfrac{1}{x} \ln(1 - x)$.

2°) Soit $x \in]-1, 0[$. D'après le cours, $a_n x^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc la suite $(a_n x^n)$ est majorée.

Plus en détail, $a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S(x) - S(x) = 0$, donc avec $\varepsilon = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n x^n| \leq \varepsilon = 1$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n x^n| \leq M$, où $M = \max(1, \max_{0\leq k\leq N} |a_k x^k|)$.

3°) Il existe $y \in]-1, x[$. Soit $N \in \mathbb{N}$ et $t \in [x, 0[$.
$\Big|\sum_{n=0}^{N} a_n t^n\Big| \leq \sum_{n=0}^{N} |a_n||t|^n \leq \sum_{n=0}^{N} |a_n||x|^n = \sum_{n=0}^{N} |a_n y^n|\Big|\frac{x}{y}\Big|^n$, or d'après la question précédente, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n y^n| \leq M$, donc
$\Big|\sum_{n=0}^{N} a_n t^n\Big| \leq \sum_{n=0}^{N} M\Big|\frac{x}{y}\Big|^n = M\frac{1-|\frac{x}{y}|^{N+1}}{1-|\frac{x}{y}|} \leq M\frac{1}{1-|\frac{x}{y}|}$. Ce majorant ne dépend pas de N, donc en faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient $|S(t)| \leq M\frac{1}{1-|\frac{x}{y}|}$, ce qui permet de conclure, car ce majorant ne dépend pas de t.

4°) Soit $N \in \mathbb{N}$: $\sum_{n=0}^{N} a_n x^n - a_0 = x\sum_{n=1}^{N} a_n x^{n-1} = x\sum_{n=0}^{N-1} a_{n+1}x^n$, donc en faisant tendre N vers $+\infty$, on en déduit que la série $\sum a_{n+1}x^n$ converge

et que $S(x) - a_0 = x\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}x^n$.

En particulier, on a montré que, pour tout $x \in]-1, 0[$, la série $\sum a_{n+1}x^n$ converge, donc on peut lui appliquer la question précédente : il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in [-\frac{1}{2}, 0[$, $\Big|\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}x^n\Big| \leq M$. Ainsi, $|S(x) - a_0| \leq |x|M \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et le principe des gendarmes permet de conclure.

5°) Soit $x \in]-1, 0[$. Posons $R(x) = \frac{S(x) - S(0)}{x - 0}$: il s'agit de montrer que $R(x)$ possède une limite réelle lorsque x tend vers 0.

$R(x)$ est la limite lorsque N tend vers $+\infty$ de $R_N(x) = \frac{1}{x}(-a_0 + \sum_{n=0}^{N} a_n x^n)$,

or $R_N(x) = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{N} a_n x^n = \sum_{n=1}^{N} a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{N-1} a_{n+1}x^n$, donc $R(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}x^n$.

Ainsi, la série $\sum a_{n+1}x^n$ converge pour tout $x \in]-1, 0[$, donc on peut lui appliquer la question précédente : $R(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} a_1$.

Ceci prouve que S est bien dérivable en 0 et que $S'(0) = a_1$.

6°) Le sens indirect étant évident, supposons que pour tout $x \in]-1, 0[$, $S(x) = 0$.
Pour $n = 0$, $0 = S(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$,

donc d'après l'unicité de la limite et la question précédente, $a_0 = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $a_k = 0$.
Alors, pour tout $x \in]-1, 0[$,

$$\begin{aligned} 0 = S(x) &= \lim_{N \longrightarrow +\infty} \sum_{h=0}^{N} a_h x^h = \lim_{\substack{N \longrightarrow +\infty \\ N \geq n}} \sum_{h=n}^{N} a_h x^h \\ &= x^n \lim_{\substack{N \longrightarrow +\infty \\ N \geq n}} \sum_{h=n}^{N} a_h x^{h-n} = x^n \lim_{\substack{N \longrightarrow +\infty \\ N \geq n}} \sum_{h=0}^{N-h} a_{h+n} x^h \\ &= x^n \sum_{h=0}^{+\infty} a_{n+h} x^h. \end{aligned}$$

Or $x^n \neq 0$, donc pour tout $x \in]-1, 0[$, la série $\sum_h a_{n+h} x^h$ converge et sa somme, notée $R(x)$, est nulle. Mais d'après la question précédente, $R(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} a_n$, donc $a_n = 0$.
D'après le principe de récurrence forte, on a montré que $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie II : Application au dénombrement

7°) On suppose que $pq > n$.

Supposons qu'il existe $(n_1, \dots, n_p) \in ([0, q] \cap \mathbb{N})^p$ tel que $\sum_{i=1}^{p} n_i = n$.

Alors $n = \sum_{i=1}^{p} n_i \leq \sum_{i=1}^{p} q = pq$, ce qui est faux.

Ainsi, $\left\{(n_1, \dots, n_p) \in ([0, q] \cap \mathbb{N})^p \ / \ \sum_{i=1}^{p} n_i = n\right\} = \emptyset$ et $B_q(n, p) = 0$.

8°) On suppose que $q \geq n$ et $p \geq 1$.

Posons $A = \left\{(n_1, \dots, n_p) \in ([0, q] \cap \mathbb{N})^p \ / \ \sum_{i=1}^{p} n_i = n\right\}$

et $B = \left\{(n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^p \ / \ \sum_{i=1}^{p} n_i = n\right\}$. A est clairement inclus dans B, mais si $(n_1, \dots, n_p) \in B$, alors pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $n_i = n - \sum_{\substack{1 \leq j \leq p \\ j \neq i}} n_j \leq n \leq q$, donc $(n_1, \dots, n_p) \in A$. Ainsi $A = B$ et $B_q(n, p) = |B|$. On reconnaît alors qu'il s'agit du nombre de combinaisons de n éléments choisis parmi $\mathbb{N}_p$ avec répétitions.
Si $a = (n_1, \dots, n_p) \in B$, notons $s_a = (\underbrace{1, \dots, 1}_{n_1 \text{ fois}}, \underbrace{2, \dots, 2}_{n_2 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{p, \dots, p}_{n_p \text{ fois}})$. Alors l'application $a \longmapsto s_a$ est une bijection de B dans l'ensemble S des suites croissantes $(s_i)_{1 \leq i \leq n}$ constituées de n entiers entre 1 et p, dont l'application réciproque est
$(s_k)_{1 \leq k \leq n} \longmapsto (|\{k \in \mathbb{N}_n \ / \ s_k = i\}|)_{1 \leq i \leq p}$.

Mais l'application $(s_i)_{1\leq i\leq n} \longmapsto (s_i+i-1)_{1\leq i\leq n}$ est une bijection de S dans l'ensemble S' des suites strictement croissantes constituées de n entiers entre 1 et $n+p-1$. Ainsi $B_q(n,p) = |S'|$. Or pour choisir un élément $(s_i)_{1\leq i\leq n}$ dans S', il suffit de choisir $\{s_i \ / \ i \in \mathbb{N}_n\}$ dans $\mathbb{N}_{n+p-1}$, soit $\binom{n+p-1}{n}$ choix, puis d'ordonner cet ensemble. Ceci démontre que $B_q(n,p) = \binom{n+p-1}{n}$.

9°) $A^p = \Big(\sum_{i_1=0}^{q} X^{i_1}\Big)\Big(\sum_{i_2=0}^{q} X^{i_2}\Big) \times \cdots \times \Big(\sum_{i_p=0}^{q} X^{i_p}\Big)$, donc par distributivité généralisée, $A^p = \sum_{(i_1,\ldots,i_p)\in[0,q]^p} X^{i_1}X^{i_2}\cdots X^{i_p}$,
puis par sommation par paquets, $A^p = \sum_{n\geq 0} \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_p)\in[0,q]^p \\ i_1+\cdots+i_p=n}} X^n = \sum_{n\geq 0} B_q(n,p)X^n$.

10°) $\sum_{n\geq 0} B_q(n,p+1)X^n = A^{p+1} = \Big(\sum_{m\geq 0} B_q(m,p)X^m\Big) \times \Big(\sum_{i=0}^{q} X^i\Big)$,
donc $\sum_{n\geq 0} B_q(n,p+1)X^n = \sum_{\substack{0\leq i\leq q \\ m\geq 0}} B_q(m,p)X^{m+i} = \sum_{n\geq 0} \sum_{\substack{0\leq i\leq q \\ m\geq 0, m+i=n}} B_q(m,p)X^n$.
Ainsi, $\sum_{n\geq 0} B_q(n,p+1)X^n = \sum_{n\geq 0} \Big(\sum_{\substack{0\leq i\leq q \\ n-i\geq 0}} B_q(n-i,p)\Big)X^n$, ce qui permet de conclure, par unicité des coefficients d'un polynôme.

11°)
◇ Notons f cette application. Par récurrence sur n, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R(n)$: pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f^{(n)}(x) = \frac{(p+n-1)!}{(p-1)!(1-x)^{p+n}}$.
En effet, c'est clair pour $n=0$ et si c'est vrai à l'ordre $n \in \mathbb{N}$, alors en dérivant $R(n)$ on obtient bien $R(n+1)$.
◇ Fixons $x \in]-1,0[$. L'application f est de classe C^∞. Pour $n \in \mathbb{N}$, on peut donc appliquer l'égalité de Taylor avec reste intégral : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$.
Ainsi, en posant $M = \sup_{t\in[0,x]} |f^{(n+1)}(t)|$, par inégalité triangulaire,
$\Big|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\Big| \leq \int_x^0 \Big|\frac{(x-t)^n}{n!}\Big| M\ dt = M\Big[\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}\Big]_x^0 = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}M$.
Soit $t \in [0,x]$. $f^{(n+1)}(t) = \frac{(p+n)!}{(p-1)!(1-t)^{p+n+1}}$, or $1-t \geq 1$, car $x \geq 0$, donc $|f^{(n+1)}(t)| \leq \frac{(p+n)!}{(p-1)!}$, donc puis par passage au sup, $M \leq \frac{(p+n)!}{(p-1)!}$ (en effet, la borne supérieure est le plus petit des majorants). On en déduit que

$$\begin{aligned}\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(p+k-1)!}{(p-1)!k!}x^k\right| \quad | &\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{(p+n)!}{(p-1)!}\\ &= \frac{1}{(p-1)!}|x|^{n+1}\times(p+n)(p+n-1)\cdots(n+2)\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(p-1)!}|x|^{n+1}n^{p-1}.\end{aligned}$$

D'après les croissances comparées, sachant que $|x|<1$, $n^{p-1}|x|^{n+1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, donc d'après le principe des gendarmes, $f(x)-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(p+k-1)!}{(p-1)!k!}x^k\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{p+k-1}{k}x^k\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}f(x)$. Ceci prouve que la série $\displaystyle\sum\binom{p+n-1}{n}x^n$ converge et a pour somme $f(x)$, ce qu'il fallait démontrer.

12°) Soit $x\in]-1,1[$.

◇ D'après le cours, $A(x)=\displaystyle\sum_{i=0}^{q}x^i=\frac{1-x^{q+1}}{1-x}$, donc $A(x)^p=\dfrac{(1-x^{q+1})^p}{(1-x)^p}$, puis d'après la question précédente et la formule du binôme de Newton, $A(x)^p=\Big(\displaystyle\sum_{h=0}^{p}\binom{p}{h}(-x^{q+1})^h\Big)\times\Big(\sum_{m=0}^{+\infty}\binom{m+p-1}{m}x^m\Big)$, ce qui permet de conclure.

◇ Soit $N\in\mathbb{N}$. $[A(x)]^p=\displaystyle\lim_{N\to+\infty}A_N$, où

$$\begin{aligned}A_N &= \Big(\sum_{h=0}^{p}\binom{p}{h}(-x^{q+1})^h\Big)\times\Big(\sum_{m=0}^{N}\binom{m+p-1}{m}x^m\Big)\\ &= \sum_{h=0}^{p}\sum_{m=0}^{N}\binom{p}{h}(-1)^h\binom{m+p-1}{p-1}x^{h(q+1)+m}\\ &= \sum_{h=0}^{p}\binom{p}{h}(-1)^h\sum_{n=h(q+1)}^{N+h(q+1)}\binom{n-h(q+1)+p-1}{p-1}x^n,\end{aligned}$$

en posant $n=m+h(q+1)$. Ainsi, en faisant tendre N vers $+\infty$,

$$[A(x)]^p=\sum_{h=0}^{p}\binom{p}{h}(-1)^h\sum_{n=h(q+1)}^{+\infty}\binom{n-h(q+1)+p-1}{p-1}x^n=\sum_{h=0}^{p}\binom{p}{h}(-1)^h\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n,h}x^n,$$

en convenant que pour tout $h\in\{0,\dots,p\}$ et $n\in\mathbb{N}$, $a_{n,h}=0$ si $n<h(q+1)$ et $a_{n,h}=\dbinom{n-h(q+1)+p-1}{p-1}$ lorsque $n\geq h(q+1)$. Alors, en passant à nouveau aux sommes partielles,

$$
\begin{aligned}
[A(x)]^p &= \lim_{N\to+\infty} \sum_{h=0}^{p} \binom{p}{h} (-1)^h \sum_{n=0}^{N} a_{n,h} x^n \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \Big(\sum_{h=0}^{p} \binom{p}{h} (-1)^h a_{n,h} \Big) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{\substack{0\le h\le p \\ tq \quad h(q+1)\le n}} \binom{p}{h} (-1)^h a_{n,h} \Big) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{h=0}^{\min(p,\lfloor \frac{n}{q+1} \rfloor)} \binom{p}{h} (-1)^h \binom{n-h(q+1)+p-1}{p-1} \Big) x^n.
\end{aligned}
$$

$\diamond$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = B_q(n,p) - \displaystyle\sum_{h=0}^{\min(p,\lfloor \frac{n}{q+1} \rfloor)} \binom{p}{h} (-1)^h \binom{n-h(q+1)+p-1}{p-1}$.

On vient de montrer que, pour tout $x \in]-1, 0[$, la série $\sum a_n x^n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$, donc d'après la première partie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Problème 2 : Séries de Fourier

Partie 1 : Coefficients de Fourier

1°) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $e^{-int} = \cos(nt) - i\sin(nt)$, donc $c_n(f) = \dfrac{a_n(f) - ib_n(f)}{2}$ et de même, $c_{-n}(f) = \dfrac{a_n(f) + ib_n(f)}{2}$.

Réciproquement, d'après les formules d'Euler, $\cos(nt) = \dfrac{e^{int} + e^{-int}}{2}$ et $\sin(nt) = \dfrac{e^{int} - e^{-int}}{2i}$, donc $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$ et $b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$.

2°) Soit $n \in \mathbb{N}$. les applications $t \longmapsto \cos(nt)f(t)$ et $t \longmapsto \sin(nt)f(t)$ sont 2π-périodiques, donc d'après le cours, dans la définition de $a_n(f)$ et de $b_n(f)$, on peut remplacer l'intervalle d'intégration par n'importe quel intervalle de longueur 2π.

f est paire, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt = 0$, en tant qu'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle centré en 0.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $t \longmapsto f(t)\cos(nt)$ étant paire, $a_n(f) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} (t^2 - \pi^2) \cos(nt) dt$. Effectuons une double intégration par parties :

$$a_n = \frac{2}{\pi}\Big(\Big[(t^2-\pi^2) \frac{sin(nt)}{n} \Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(nt)}{n} \times 2t\, dt \Big) = -\frac{4}{\pi n} \Big(\Big[-\frac{\cos(nt)}{n} t \Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{n} dt \Big).$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{a_n = (-1)^n \dfrac{4}{n^2}}$.

D'autre part, $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} (t^2-\pi^2)dt = \dfrac{2}{\pi}\Big[\dfrac{x^3}{3} - \pi^2 x\Big]_0^{\pi} = \dfrac{2}{\pi}(\dfrac{\pi^3}{3} - \pi^3)$, donc $a_0 = -\dfrac{4\pi^2}{3}$.

3°)

◇ Soit $n \in \mathbb{Z}$: par inégalité triangulaire, $|c_n(f)| \le \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)e^{-int}|\,dt = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|\,dt$: ce majorant ne dépend pas de n, donc la famille $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée. On raisonne de même pour les suites $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$.

◇ Soit $n \in \mathbb{Z}$. $c_n(g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t+a)e^{-int}\,dt$, donc en posant $u = t+a$,
$c_n(g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(u)e^{-in(u-a)}\,du$, donc $c_n(g) = e^{ina}c_n(f)$.

4°) g étant C^1, on peut effectuer une intégration par parties :
$\displaystyle\int_a^b g(t)e^{int}\,dt = \Big[g(t)\frac{e^{int}}{in}\Big]_a^b - \int_a^b g'(t)\frac{e^{int}}{in}\,dt = -i\frac{g(b)e^{inb} - g(a)e^{ina}}{n} + \frac{i}{n}\int_a^b g'(t)e^{-int}\,dt$,
donc en utilisant plusieurs fois l'inégalité triangulaire,
$\Big|\displaystyle\int_a^b g(t)e^{int}\,dt\Big| \le \frac{|g(b)|+|g(a)|}{n} + \frac{1}{n}\int_a^b |g'(t)|\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Le principe des gendarmes permet de conclure.

5°)

◇ Soit $n \in \mathbb{N}$.
$c_{-n}(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)e^{int}\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après la question précédente, étendue aux cas des applications continues. En posant $u = -t$, on obtient que
$c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt = \frac{-1}{2\pi}\int_0^{-2\pi} f(-t)e^{int}\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, toujours d'après la question précédente.
De plus $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

◇ Soit $n \in \mathbb{Z}$. En intégrant par parties,
$c_n(f') = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\left(\Big[f(t)e^{-int}\Big]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} f(t)ine^{-int}dt\right) = inc_n(f)$.
Alors, par récurrence sur k, on montre que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$.
Or d'après la question précédente, $c_n(f^{(k)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $n^k c_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Partie II : Le théorème de Dirichlet

6°) Soit $t \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$. $D_n(t) = e^{-int}\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{i(k+n)t} = e^{-int}\sum_{k=0}^{2n} e^{ikt} = e^{-int}\frac{1-e^{(2n+1)it}}{1-e^{it}}$,
car $e^{it} \ne 1$, donc $D_n(t) = e^{-int}\dfrac{e^{it(n+\frac{1}{2})}}{e^{\frac{it}{2}}}\dfrac{\sin(\frac{2n+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})}$. Ainsi, $\sin\Big(\dfrac{2n+1}{2}t\Big) = D_n(t)\sin\Big(\dfrac{t}{2}\Big)$

et cette relation est encore vraie lorsque $t \in 2\pi\mathbb{Z}$, car dans ce cas $\frac{t}{2} \in \pi\mathbb{Z}$, donc $\sin\Big(\frac{2n+1}{2}t\Big) = 0 = \sin\Big(\frac{t}{2}\Big)$.

7°) $2\pi S_n(f)(t_0) = \sum_{k=-n}^{n} 2\pi c_k(f)e^{ikt_0} = \sum_{k=-n}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ik(t_0-t)}dt$,

ainsi $2\pi S_n(f)(t_0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t_0-t)dt$. Posons $t = t_0 - u$. On obtient $2\pi S_n(f)(t_0) = \int_{t_0+\pi}^{t_0-\pi} f(t_0-u)D_n(u)(-du)$, mais f et D_n sont 2π-périodiques, donc $2\pi S_n(f)(t_0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t_0-u)D_n(u)du$.

Coupons cette intégrale en deux intégrales sur les intervalles $[0,\pi]$ et $[-\pi,0]$ et pratiquons le changement de variable $v = -u$ sur la seconde intégrale. On obtient $2\pi S_n(f)(t_0) = \int_{0}^{\pi} f(t_0-u)D_n(u)du + \int_{\pi}^{0} f(t_0+v)D_n(-v)(-dv)$. Or D_n est paire, donc $2\pi S_n(f)(t_0) = \int_{0}^{\pi} (f(t_0-u)+f(t_0+u))D_n(u)du$.

8°)

◇ $\alpha(t) = \Big(\frac{f(t_0+t)-f(t_0)}{t} - \frac{f(t_0-t)-f(t_0)}{-t}\Big) \times \frac{t}{\sin(\frac{t}{2})}$, or f est dérivable en t_0 et on sait que $\frac{\sin t}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$, donc $\alpha(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}(f'(t_0)-f'(t_0)) = 0$.

◇ D_n étant paire, $2\int_{0}^{\pi} D_n(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = \sum_{k=-n}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\ dt$, or, pour $k \in \mathbb{Z}^*$, $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\ dt = \Big[\frac{e^{ikt}}{ik}\Big]_{-\pi}^{\pi} = 0$, donc $2\int_{0}^{\pi} D_n(t)dt = 2\pi$. On en déduit que $2\pi(S_n(f)(t_0)-f(t_0)) = \int_{0}^{\pi} (f(t_0-t)+f(t_0+t)-2f(t_0))D_n(t)\ dt = \int_{0}^{\pi} \alpha(t)\sin\Big(\frac{t}{2}\Big)D_n(t)\ dt$,

donc $2\pi(S_n(f)(t_0)-f(t_0)) = \int_{0}^{\pi} \alpha(t)\sin(\frac{2n+1}{2}t)\ dt$, puis en posant $t = 2u$,

$2\pi(S_n(f)(t_0)-f(t_0)) = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\alpha(2u)\sin((2n+1)u)\ du = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\alpha(2u)\frac{e^{(2n+1)iu}-e^{-(2n+1)iu}}{2i}\ du$,

or on peut utiliser le résultat admis après la question 4 car $u \longmapsto 2\alpha(2u)$ est prolongeable en une application continue sur $[0,\frac{\pi}{2}]$. Ainsi, $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\alpha(2u)e^{(2n+1)iu}\ du \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

et de même $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\alpha(2u)e^{-(2n+1)iu}\ du = \int_{0}^{-\frac{\pi}{2}} 2\alpha(-2u)e^{(2n+1)iu}(-du) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

donc on a bien montré que $2\pi(S_n(f)(t_0)-f(t_0)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

9°) Soit $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. $S_n(f)(t) = c_0(f) + \sum_{k=1}^{n}(c_k(f)e^{ikt} + c_{-k}(f)e^{-ikt})$.

Soit $k \in \mathbb{N}_n$. D'après la question 1,

$$\begin{aligned} c_k(f)e^{ikt} + c_{-k}(f)e^{-ikt} &= \frac{a_k(f) - ib_k(f)}{2}e^{ikt} + \frac{a_k(f) + ib_k(f)}{2}e^{-ikt} \\ &= a_k(f)\frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2} + b_k(f)\frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2i}, \end{aligned}$$

donc $c_k(f)e^{ikt} + c_{-k}(f)e^{-ikt} = a_k(f)\cos(kt) + b_k(t)\sin(kt)$.

De plus, $b_0(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(0.t)\ dt = 0$, donc $c_0(f) = \dfrac{a_0(f)}{2}$. Ainsi,

$S_n(f)(t) = \dfrac{a_0(f)}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\Big(a_k(f)\cos(kt) + b_k(f)\sin(kt)\Big)$, or d'après la question précédente,

$S_n(f)(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(t)$, donc la série $\sum\Big(a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)\Big)$ converge,

et $f(t) = \dfrac{a_0(f)}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)\Big)$.

10°) On ne peut pas appliquer directement le résultat de la question précédente, car l'application f définie en question 2 n'est pas dérivable en les points de $\pi + 2\pi\mathbb{Z}$. Cependant, si $t_0 \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$, f admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche. En effet, pour $t \in [-\pi, \pi]$, $f(t) = t^2 - \pi^2$, donc f est dérivable à gauche en π, la valeur de la dérivée à gauche étant 2π : ainsi, par 2π-périodicité de f, $\dfrac{f(t_0 - t) - f(t_0)}{-t} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 2\pi$.
De même, en étudiant le comportement de f à droite de $-\pi$, on montre que f est dérivable à droite en t_0, donc que $\dfrac{f(t_0 + t) - f(t_0)}{t} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} -2\pi$.
On en déduit, en reprenant la démonstration de la question 8, que $\alpha(t)$ possède encore une limite lorsque t tend vers 0^+, cette fois non nulle. Cela permet tout de même de prolonger $u \longmapsto 2\alpha(2u)$ en une application continue sur $[0, \pi]$. La démonstration de la question 8 et son résultat sont donc encore valables, ainsi que le résultat de la question 9. Alors, en utilisant les coefficients de Fourier calculés en question 2, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \ f(x) = -\frac{2\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos(nx).$$

En particulier, pour $x = \pi$ et pour $x = 0$, on obtient que

$0 = -\dfrac{2\pi^2}{3} + 4\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$,

et $-\pi^2 = -\dfrac{2\pi^2}{3} - 4\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.