

# DM 13 : un corrigé

## Problème 1 : fractions continues

### Partie 1 : notations.

1°)  $\diamond$   $x_0$  est bien défini et  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}_+}$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , supposons que  $x_n$  est bien défini et que  $x_n \in \overline{\mathbb{R}_+}$ . Alors, avec les conventions de l'énoncé,  $\{x_n\} \in \overline{\mathbb{R}_+}$ , puis  $x_{n+1} = \frac{1}{\{x_n\}}$  est bien défini et appartient à  $\overline{\mathbb{R}_+}$ .

Ainsi, d'après le principe de récurrence, la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie, en tant que suite d'éléments de  $\overline{\mathbb{R}_+}$ .

$\diamond$  Alors l'énoncé permet bien de définir  $a_n = \lfloor x_n \rfloor \in \overline{\mathbb{R}_+}$ .

$\diamond$  On convient naturellement que, pour tout  $x \in \overline{\mathbb{R}_+}$ ,  $+\infty + x = x + (+\infty) = +\infty$ . Alors, pour tout  $s, t \in \overline{\mathbb{R}_+}$ , la quantité  $s + \frac{1}{t}$  est définie et appartient à  $\overline{\mathbb{R}_+}$ .

$\diamond$  Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Notons  $R(k)$  l'assertion suivante : pour tout  $s_0, \dots, s_k \in \overline{\mathbb{R}_+}$ , la quantité  $[s_0, \dots, s_k]$  est définie et appartient à  $\overline{\mathbb{R}_+}$ .

Soit  $s_0 \in \overline{\mathbb{R}_+}$ . Alors  $[s_0] = s_0$  est défini et appartient à  $\overline{\mathbb{R}_+}$ , donc  $R(0)$  est vraie.

Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Supposons  $R(k)$ . Soit  $s_0, \dots, s_{k+1} \in \overline{\mathbb{R}_+}$ .

D'après le point précédent,  $s_k + \frac{1}{s_{k+1}}$  est défini et appartient à  $\overline{\mathbb{R}_+}$ , donc d'après  $R(k)$ ,

$[s_0, \dots, s_{k+1}] = \left[ s_0, \dots, s_{k-1}, s_k + \frac{1}{s_{k+1}} \right]$  est défini et appartient à  $\overline{\mathbb{R}_+}$ .

Le principe de récurrence permet de conclure.

2°) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $R(n)$  la propriété suivante :  $x = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, x_n]$ .

*Initialisation* : On a  $[x_0] = x_0 = x$ , ce qui démontre que  $R(0)$  est vraie.

*Hérédité* : Fixons  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $R(n)$  est vraie et démontrons  $R(n+1)$ . On a

$$\begin{aligned} [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, x_{n+1}] &= \left[ a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{x_{n+1}} \right] \\ &= [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, \lfloor x_n \rfloor + \{x_n\}] \\ &= [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, x_n] \\ &= x \quad \text{par hypothèse de récurrence,} \end{aligned}$$

ce qui démontre que  $R(n+1)$  est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, x_n]$ .

## Partie 2 : Fraction continue d'un rationnel.

3°) Les divisions euclidiennes effectuées correspondent à l'application de l'algorithme d'Euclide. Comme  $u \wedge v = 1$ , cet algorithme se termine par un reste égal à 1 suivi d'un reste nul. Ainsi, l'algorithme d'Euclide justifie l'existence de  $d \in \mathbb{N}$  tel que  $r_d = 1$  et  $r_{d+1} = 0$ .

4°)  $\diamond$  Pour tout  $k \in \{0, \dots, d\}$ , on note  $S(k)$  la propriété  $x_k = \frac{r_{k-1}}{r_k}$ .

*Initialisation* : On a  $\frac{r_{0-1}}{r_0} = \frac{u}{v} = x = x_0$  donc  $S(0)$  est vraie.

*Hérédité* : Fixons  $k \in \{0, \dots, d-1\}$  tel que  $S(k)$  est vraie et démontrons  $S(k+1)$ .

On a  $\frac{r_{k-1}}{r_k} = \frac{q_k \times r_k + r_{k+1}}{r_k} = q_k + \frac{r_{k+1}}{r_k}$ , avec  $0 \leq \frac{r_{k+1}}{r_k} < 1$ , car dans la division euclidienne  $r_{k-1} = q_k \times r_k + r_{k+1}$ , on a  $0 \leq r_{k+1} < r_k$ .

De plus  $q_k \in \mathbb{N}$ , donc  $\left\{ \frac{r_{k-1}}{r_k} \right\} = \frac{r_{k+1}}{r_k}$ .

Par hypothèse de récurrence, cela donne  $\{x_k\} = \frac{r_{k+1}}{r_k}$  et donc  $x_{k+1} = \frac{1}{\{x_k\}} = \frac{r_k}{r_{k+1}}$ ,

Donc  $S(k+1)$  est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout  $k \in \{0, \dots, d\}$ ,  $x_k = \frac{r_{k-1}}{r_k}$ .

$\diamond$  Pour tout  $k \in \{0, \dots, d\}$ , on a

$$a_k = \lfloor x_k \rfloor = \left\lfloor \frac{r_{k-1}}{r_k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{q_k \times r_k + r_{k+1}}{r_k} \right\rfloor = \left\lfloor q_k + \frac{r_{k+1}}{r_k} \right\rfloor = q_k$$

puisque  $0 \leq \frac{r_{k+1}}{r_k} < 1$ . Donc  $\forall k \in \{0, \dots, d\}$ ,  $a_k = q_k$ .

$\diamond$  On constate alors que

$$\begin{aligned} x_{d+1} &= \frac{1}{\{x_d\}} = \frac{1}{\left\{ \frac{r_{d-1}}{r_d} \right\}} = \frac{1}{\{r_{d-1}\}} \quad (\text{car } r_d = 1) \\ &= \frac{1}{0} \quad (\text{car } r_{d-1} \in \mathbb{N}^*) \\ &= +\infty, \end{aligned}$$

ce qui permet de démontrer (à l'aide d'une récurrence immédiate) que pour tout  $\forall k \geq d+1$ ,  $x_k = a_k = +\infty$ .

5°) D'après la question 2,  $x = [a_0, a_1, \dots, a_d, x_{d+1}]$ , donc

$x = [q_0, q_1, \dots, q_d, +\infty] = x = [q_0, q_1, \dots, q_{d-1}, q_d]$ , ce qu'il fallait démontrer.

6°) On calcule  $\frac{355}{113} = 3 + \frac{16}{113} = 3 + \frac{1}{\frac{113}{16}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16}}$ , donc  $\frac{355}{113} = [3, 7, 16]$ .

7°) L'ensemble  $\{n \in \mathbb{N} / a_n = +\infty\}$  est une partie non vide de  $\mathbb{N}$ , donc il admet un plus petit élément. Comme  $a_0 \neq +\infty$ , on sait que ce plus petit élément est supérieur ou égal à 1. Cela nous permet de l'écrire  $d+1$  où  $d \in \mathbb{N}$ .

On a donc  $\forall k \in \{0, \dots, d\}$ ,  $a_k \in \mathbb{N}$  et  $a_{d+1} = +\infty$ . Il s'ensuit que  $x_{d+1} = +\infty$ .

D'après la question 2, on a donc

$$x = [a_0, a_1, \dots, a_d, x_{d+1}] = [a_0, a_1, \dots, a_d, +\infty] = [a_0, a_1, \dots, a_d].$$

On a donc montré que  $x = [a_0, a_1, \dots, a_{d-1}, a_d]$  avec  $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{N}$ .

Dès lors,  $x$  s'écrit à l'aide d'un nombre fini de fractions d'entiers empilées, donc  $x \in \mathbb{Q}_+$ .

### Partie 3 : Fraction continue d'un irrationnel.

8°)  $\diamond$  Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $\{x_n\} = 0$ . Alors  $x_{n+1} = +\infty$ , puis  $a_{n+1} = +\infty$ , ce qui est faux. Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\{x_n\} \in ]0, 1[$ , donc pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x_n > 1$  et donc  $a_n \geq 1$ . Cela implique que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1} \geq q_n + q_{n-1}$ . Comme  $q_0 = 1$ , on en déduit par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $q_n \geq 1$ . Il s'ensuit que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $q_{n+1} > q_n$ . Par conséquent,  $(q_n)_{n \geq 1}$  est strictement croissante.

$\diamond$  Par récurrence, on en déduit que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $q_n \geq n$ .

En effet, on a vu que  $q_1 \geq 1$ , et si  $q_n \geq n$  pour un certain  $n \geq 1$ , alors comme  $q_{n+1} > q_n$ , on a  $q_{n+1} > n$ , donc  $q_{n+1} \geq n+1$ .

On en déduit que  $q_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ .

9°)  $\diamond$  On a vu que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_n \in \mathbb{N}^*$ . On en déduit par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $[a_0, \dots, a_n, t]$  est défini et appartient à  $\mathbb{R}_+^*$ .

$\diamond$  Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $R(n)$  la propriété suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, t] = \frac{p_n + \frac{p_{n-1}}{t}}{q_n + \frac{q_{n-1}}{t}}.$$

*Initialisation* : Soit  $t \in \mathbb{R}_+^*$ . On calcule :

$$[a_0, t] = a_0 + \frac{1}{t} \text{ et } \frac{p_0 + \frac{p_{-1}}{t}}{q_0 + \frac{q_{-1}}{t}} = \frac{a_0 + \frac{1}{t}}{1 + \frac{0}{t}} = a_0 + \frac{1}{t}, \text{ d'où } R(0).$$

*Hérédité* : Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons  $R(n)$  et montrons  $R(n+1)$ . Soit  $t \in \mathbb{R}_+^*$ .

$$[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, t] = \left[ a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1} + \frac{1}{t} \right], \text{ donc d'après } R(n),$$

$$\begin{aligned} [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, t] &= \frac{\left( a_{n+1} + \frac{1}{t} \right) p_n + p_{n-1}}{\left( a_{n+1} + \frac{1}{t} \right) q_n + q_{n-1}} \\ &= \frac{a_{n+1}p_n + p_{n-1} + \frac{p_n}{t}}{a_{n+1}q_n + q_{n-1} + \frac{q_n}{t}} \\ &= \frac{p_{n+1} + \frac{p_n}{t}}{q_{n+1} + \frac{q_n}{t}}, \end{aligned}$$

ce qui démontre que  $R(n+1)$ .

Le principe de récurrence permet de conclure.

◇ Dans la formule précédente, on fait tendre  $t$  vers  $+\infty$ . On obtient alors le résultat :  
 $[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$ .

**10°)** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $R(n) : p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n+1}$ .

*Initialisation* : On a  $p_0 q_{-1} - q_0 p_{-1} = a_0 \times 0 - 1 \times 1 = -1 = (-1)^{0+1}$  d'où  $R(0)$ .

*Hérédité* : Fixons  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $R(n)$  est vraie et démontrons  $R(n+1)$ . On calcule  $p_{n+1} q_n - q_{n+1} p_n = (a_{n+1} p_n + p_{n-1}) q_n - (a_{n+1} q_n + q_{n-1}) p_n = -(p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1})$ , donc d'après  $R(n)$ ,  $p_{n+1} q_n - q_{n+1} p_n = (-1)^{n+2}$ , ce qui démontre que  $R(n+1)$  est vraie. D'après le principe de récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n+1}$ .

Cette égalité est une relation de Bézout. D'après le théorème de Bézout, on en déduit que  $p_n$  et  $q_n$  sont premiers entre eux pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et donc que la fraction  $\frac{p_n}{q_n}$  est irréductible.

**11°)** ◇ Pour tout  $n \geq 1$ , on a

$\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{p_{2n-1} q_{2n} - q_{2n-1} p_{2n}}{q_{2n-1} q_{2n}} = \frac{-(-1)^{2n+1}}{q_{2n-1} q_{2n}} = \frac{1}{q_{2n-1} q_{2n}}$  où la troisième égalité découle du résultat de la question précédente.

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = +\infty$ , on en déduit que  $\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

◇ Pour tout  $n \geq 1$ , on calcule

$$\begin{aligned} \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - \frac{p_n}{q_n} &= \frac{p_{n+2} q_n - q_{n+2} p_n}{q_{n+2} q_n} \\ &= \frac{(a_{n+2} p_{n+1} + p_n) q_n - (a_{n+2} q_{n+1} + q_n) p_n}{q_{n+2} q_n} \\ &= \frac{a_{n+2} (p_{n+1} q_n - q_{n+1} p_n)}{q_{n+2} q_n} \\ &= \frac{a_{n+2} (-1)^n}{q_{n+2} q_n} \text{ d'après la question précédente.} \end{aligned}$$

Donc  $\frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} > 0$  et  $\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} < 0$ , ce qui démontre que  $\left(\frac{p_{2n}}{q_{2n}}\right)_{n \geq 1}$  est strictement croissante et que  $\left(\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}\right)_{n \geq 1}$  est strictement décroissante.

**12°)** ◇ Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La fonction  $t \mapsto [a_0, a_1, \dots, a_{2n-1}, a_{2n}, t]$  est décroissante (car  $t$  est en dessous d'un nombre impair de traits de fraction). Il s'ensuit que

$$[a_0, a_1, \dots, a_{2n-1}, a_{2n}, x_{2n+1}] \geq [a_0, a_1, \dots, a_{2n-1}, a_{2n}, +\infty],$$

$$\text{or d'après la question 2, } [a_0, a_1, \dots, a_{2n-1}, a_{2n}, x_{2n+1}] = x$$

$$\text{et } [a_0, a_1, \dots, a_{2n-1}, a_{2n}, +\infty] = [a_0, a_1, \dots, a_{2n-1}, a_{2n}] = \frac{p_{2n}}{q_{2n}}, \text{ donc } x \geq \frac{p_{2n}}{q_{2n}}.$$

De même, la fonction  $t \mapsto [a_0, a_1, \dots, a_{2n-2}, a_{2n-1}, t]$  est croissante (car  $t$  est en dessous d'un nombre pair de traits de fraction).

$$\text{Il s'ensuit que } [a_0, a_1, \dots, a_{2n-2}, a_{2n-1}, x_{2n}] \leq [a_0, a_1, \dots, a_{2n-2}, a_{2n-1}, +\infty],$$

$$\text{c'est-à-dire que } x \leq \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}.$$

En conclusion,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{p_{2n}}{q_{2n}} \leq x \leq \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}$ .

◇ La suite  $\left(\frac{p_{2n}}{q_{2n}}\right)_{n \geq 1}$  est ainsi croissante et majorée, donc elle converge, vers une limite que l'on notera temporairement  $x^-$ . De même, la suite  $\left(\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}\right)_{n \geq 1}$  est décroissante et minorée, donc elle converge, vers une limite que l'on notera temporairement  $x^+$ .

En passant à la limite dans l'encadrement précédent, on obtient  $x^- \leq x \leq x^+$ .

De plus on a vu que  $\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc par unicité de la limite,  $x^- = x^+$ . Ainsi,  $x^- \leq x \leq x^+$ , donc  $x = x^- = x^+$ .

Ainsi, les deux suites  $\left(\frac{p_{2n}}{q_{2n}}\right)_{n \geq 1}$  et  $\left(\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}\right)_{n \geq 1}$  convergent vers  $x$ , donc  $\frac{p_n}{q_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$  : c'est un résultat classique, que l'on peut démontrer en passant aux  $\varepsilon$  :

Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$  tels que,

pour tout  $n \geq N_1$  (c'est-à-dire  $2n \geq 2N_1$ ),  $\left|\frac{p_{2n}}{q_{2n}} - x\right| \leq \varepsilon$  et,

pour tout  $n \geq N_2$  (c'est-à-dire  $2n - 1 \geq 2N_2 - 1$ ),  $\left|\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} - x\right| \leq \varepsilon$ .

On en déduit, en distinguant le cas où  $n$  est pair de celui où  $n$  est impair, qu'en posant  $N = \max(2N_1, 2N_2 - 1)$ , pour tout  $n \geq N$ ,  $\left|\frac{p_n}{q_n} - x\right| \leq \varepsilon$ , ce qu'il fallait démontrer.

**13°)** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . D'après la question 10,  $p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n = (-1)^n$ , donc en divisant par  $q_n q_{n+1}$ ,  $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}$ . On en déduit, en notant  $d$  la distance dans  $\mathbb{R}$ , que

$d\left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right) \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} \leq \frac{1}{q_n^2}$ , car d'après la question 8, la suite  $(q_n)_{n \geq 1}$  est croissante.

Or pour tout  $n \geq 1$ ,  $\frac{p_{2n}}{q_{2n}} \leq x \leq \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}$ , donc en distinguant les cas où  $n$  est pair ou

impair, on en déduit que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $d\left(x, \frac{p_n}{q_n}\right) \leq d\left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right)$ , donc pour tout

$n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n^2}$ .

## Problème 2 : ensembles pairs

**1°)** Par hypothèse, il existe une bijection  $f$  de  $E$  dans  $F$ . On suppose que  $E$  est pair. Il existe une partition par paires de  $E$  que l'on notera  $\mathcal{E}$ .

Notons  $\mathcal{F} = \{f(P) \mid P \in \mathcal{E}\}$ . Il suffit de montrer que  $\mathcal{F}$  est une partition par paires de  $F$ .

—  $f$  étant injective, pour tout  $P \in \mathcal{E}$ ,  $|f(P)| = |P| = 2$ , donc  $f(P)$  est une paire de  $F$ .

— Soit  $P', Q' \in \mathcal{F}$  tel que  $P' \neq Q'$ .

Il existe  $P, Q \in \mathcal{E}$  tels que  $P' = f(P)$  et  $Q' = f(Q)$ .

$P' \neq Q'$ , donc  $P \neq Q$ .

Supposons que  $P' \cap Q' \neq \emptyset$ , c'est-à-dire que  $f(P) \cap f(Q) \neq \emptyset$ . Alors il existe  $y \in f(P) \cap f(Q)$ , donc il existe  $p \in P$  et  $q \in Q$  tels que  $y = f(p) = f(q)$ .  $f$  est injective, donc  $p = q \in P \cap Q = \emptyset$ .

C'est impossible donc  $P' \cap Q' = f(P) \cap f(Q) = \emptyset$ .

— D'après le cours,  $\bigcup_{P \in \mathcal{E}} f(P) = f\left(\bigcup_{P \in \mathcal{E}} P\right) = f(E) = F$ , car  $f$  est surjective.

Ceci démontre que  $\mathcal{F}$  est une partition par paires de  $F$ , donc que  $F$  est pair.

2°) Posons  $\mathcal{F} = \{\{2n, 2n+1\} / n \in \mathbb{N}\}$ .

— Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\{2n, 2n+1\}$  est une paire de  $\mathbb{N}$ ;

— Soit  $n, m \in \mathbb{N}$  tels que  $n \neq m$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $n < m$ . Alors  $n \leq m-1$ , donc  $2n \leq 2m-2$ . Ainsi,  $2n < 2n+1 < 2m < 2m+1$ , donc  $\{2n, 2n+1\} \cap \{2m, 2m+1\} = \emptyset$ .

— On sait que  $\mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{2n, 2n+1\}$ , car tout entier est pair ou impair.

Ceci démontre que  $\mathcal{F}$  est une partition par paires de  $\mathbb{N}$ , donc  $\mathbb{N}$  est pair.

3°) Posons  $\mathcal{F} = \{\{A, \bar{A}\} / A \subset E\}$ .

— Soit  $A \subset E$ .  $E$  étant non vide, il existe  $x \in E$ . Si  $x \in A$ , alors  $x \notin \bar{A}$ , donc  $A \neq \bar{A}$  et de même, si  $x \notin A$ , alors  $x \in \bar{A}$ , donc  $A \neq \bar{A}$ . Ceci montre que  $\{A, \bar{A}\}$  est une paire de  $E$ ;

— Soit  $P, Q \in \mathcal{F}$ . Il existe  $A, B \in \mathcal{P}(E)$  tels que  $P = \{A, \bar{A}\}$  et  $Q = \{B, \bar{B}\}$ .

Supposons que  $P \cap Q \neq \emptyset$ . Alors  $A \in Q$  ou  $\bar{A} \in Q$ , donc il y a 4 possibilités :  $A = B$ ,  $A = \bar{B}$ ,  $\bar{A} = B$  ou  $\bar{A} = \bar{B}$ , qui se regroupent en seulement 2 possibilités :  $A = B$  ou  $A = \bar{B}$ . Dans chaque cas, on a bien  $P = \{A, \bar{A}\} = \{B, \bar{B}\} = Q$ .

On a montré que  $P \cap Q \neq \emptyset \implies P = Q$ ,

donc par contraposée,  $P \neq Q \implies P \cap Q = \emptyset$ .

— Soit  $A \in \mathcal{P}(E)$ . Posons  $Q = \{A, \bar{A}\}$ . Alors  $A \in Q$  et  $Q \in \mathcal{F}$ , donc  $A \in \bigcup_{P \in \mathcal{F}} P$ .

L'inclusion réciproque étant évidente, on a montré que  $\mathcal{P}(E) = \bigcup_{P \in \mathcal{F}} P$ .

Ceci démontre que  $\mathcal{F}$  est une partition par paires de  $\mathcal{P}(E)$ , donc  $\mathcal{P}(E)$  est pair.

4°) Soit  $E$  un ensemble fini pair. Il existe une partition par paires  $\{A_1, \dots, A_m\}$  de  $E$  où  $m \in \mathbb{N}$  (celle-ci contient nécessairement un nombre fini de paires sinon  $E$  serait infini).

Dès lors, on a  $|E| = \left| \bigsqcup_{i=1}^m A_i \right| = \sum_{i=1}^m |A_i| = \sum_{i=1}^m 2 = 2m$  ce qui démontre que  $E$

est de cardinal pair.

Réciproquement, considérons un ensemble fini  $E$  de cardinal pair  $2m$  où  $m \in \mathbb{N}$ . On peut énumérer ses éléments de sorte que  $E = \{x_1, x_2, \dots, x_{2m-1}, x_{2m}\}$ . Alors l'ensemble  $\{\{x_1, x_2\}, \dots, \{x_{2m-1}, x_{2m}\}\}$  est une partition par paires de  $E$ , ce qui démontre que  $E$  est pair.

Ainsi, un ensemble fini est pair si, et seulement si, son cardinal est pair.

5°)  $\diamond$  Soit  $E$  un ensemble de cardinal  $2m$ , où  $m \in \mathbb{N}^*$ .

$E$  est non vide, donc il possède au moins un élément que l'on note  $e$ .

Pour construire une partition par paires de  $E$ , on choisit un élément  $f$  dans  $E \setminus \{e\}$  (il y a  $2m - 1$  choix) afin de constituer la paire  $\{e, f\}$ , puis on complète  $\{\{e, f\}\}$  en choisissant une partition par paires de  $E \setminus \{e, f\}$  (il y a  $a_{m-1}$  choix). On obtient donc  $(2m - 1)a_{m-1}$  partitions par paires de  $E$ .

Par conséquent, pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_m = (2m - 1)a_{m-1}$ .

◇ De plus  $a_0$  désigne le nombre de partitions par paires de  $\emptyset$ , or  $\mathcal{P}_2(\emptyset) = \emptyset$ , donc  $\mathcal{F} = \emptyset$  est l'unique partition par paires de  $E = \emptyset$ . Ceci prouve que  $a_0 = 1$ .

Par récurrence, on en déduit alors que, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $a_m = \prod_{k=1}^m (2k - 1)$  (en convenant que le produit vide est égal à 1).

En multipliant et en divisant par le produit des nombres pairs de 2 à  $2m$ , il vient, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $a_m = \frac{(2m)!}{(2m) \times (2m - 2) \times \cdots \times 4 \times 2}$ . Chaque facteur du dénominateur

de factorise par 2 pour donner :  $\forall m \in \mathbb{N}$ ,  $a_m = \frac{(2m)!}{m!2^m}$ .

6°) Lorsque  $\mathcal{E} \in \Pi(E)$ , notons  $\varphi(\mathcal{E}) = \{f(P) / P \in \mathcal{E}\}$ . D'après la première question,  $\varphi$  est une application de  $\Pi(E)$  dans  $\Pi(F)$ .

De même, pour tout  $\mathcal{F} \in \Pi(F)$ , notons  $\Psi(\mathcal{F}) = \{f^{-1}(Q) / Q \in \mathcal{F}\}$ . Toujours d'après la première question,  $\Psi$  est une application de  $\Pi(F)$  dans  $\Pi(E)$ .

On vérifie que  $\varphi \circ \Psi = Id_{\Pi(F)}$  et  $\Psi \circ \varphi = Id_{\Pi(E)}$ , donc  $\varphi$  est une bijection de  $\Pi(E)$  dans  $\Pi(F)$ , dont  $\Psi$  est la bijection réciproque.

7°) ◇ Lorsque  $\sigma$  est une bijection de  $E$  dans  $E$ , il est clair que  $\varphi(\sigma)$  est une partition par paires de  $E$ , donc  $\varphi$  est bien une application de  $\mathcal{S}(E)$  dans  $\Pi(E)$ .

Soit  $\mathcal{F} \in \Pi(E)$ . On a vu en question 4 que  $|\mathcal{F}| = m$ . Notons  $P_1, \dots, P_m$  les éléments de  $\mathcal{F}$ , deux à deux distincts. Pour tout  $i \in \mathbb{N}_m$ , notons  $\sigma(2i - 1)$  et  $\sigma(2i)$  les deux éléments de  $P_i$ . Ainsi,  $E = \{\sigma(1), \dots, \sigma(2m)\}$ , donc  $\sigma$  est une bijection de  $E$  dans  $E$  et  $\mathcal{F} = \varphi(\sigma)$ . Ceci démontre que  $\varphi$  est surjective.

◇ Reprenons les notations du point précédent. Pour construire  $\sigma' \in \mathcal{S}(E)$  telle que  $\varphi(\sigma') = \mathcal{F}$ , on peut d'abord choisir une façon d'ordonner  $P_1, \dots, P_m$ , sous la forme  $P_{f(1)}, \dots, P_{f(m)}$ , où  $f$  est une bijection de  $\mathbb{N}_m$  dans  $\mathbb{N}_m$ , soit  $m!$  choix, puis pour chaque  $i \in \mathbb{N}_m$ , on choisit pour  $\sigma'(2i - 1)$  l'un des deux éléments de  $P_{f(i)}$ , soit 2 choix, l'autre élément étant alors noté  $\sigma'(2i)$ . Ainsi, le nombre d'antécédents de  $\mathcal{F}$  par  $\varphi$  est constamment égal à  $m!2^m$ . Alors, d'après le principe des bergers,  $|\Pi(E)| = \frac{|\mathcal{S}(E)|}{m!2^m} = \frac{(2m)!}{m!2^m}$ .

De plus, si  $F$  est un ensemble de cardinal  $2m$ , il est en bijection avec  $\bar{E}$ , donc d'après la question précédente, le nombre de partitions par paires de  $F$  est égale à celui de  $E$ .

Ainsi, on a établi à nouveau que  $a_m = \frac{(2m)!}{m!2^m}$ .

8°) Posons  $x_0 = x$ . Comme  $E \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$ , il existe  $x_1 \in E \setminus \{x_0\}$ .

Comme  $E \setminus \{x_0, x_1\} \neq \emptyset$ , il existe  $x_2 \in E \setminus \{x_0, x_1\}$ , etc. On construit ainsi (par récurrence) une suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E$ , distincts deux à deux.

Considérons l'application  $\varphi : E \longrightarrow E \setminus \{x\}$   
 $y \longmapsto \begin{cases} x_{k+1} & \text{s'il existe } k \in \mathbb{N} \text{ tel que } y = x_k \\ y & \text{sinon} \end{cases}$  .

C'est une bijection puisqu'on voit que sa réciproque

est  $\varphi : E \setminus \{x\} \longrightarrow E$   
 $y \longmapsto \begin{cases} x_{k-1} & \text{s'il existe } k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } y = x_k \\ y & \text{sinon} \end{cases}$  .

**9°)** L'ensemble  $\{\{-x, x\} / x \in \mathbb{R}_+^*\}$  est une partition par paires de  $\mathbb{R}^*$ . Donc  $\mathbb{R}^*$  est pair. Or, d'après la question précédente,  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}^*$  sont équipotents. De plus, d'après la question 1, deux ensembles équipotents ont la même parité. Donc  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}^*$  ont la même parité. En conclusion,  $\mathbb{R}$  est pair.

**10°)** Posons  $\mathcal{E} = \bigcup_{\mathcal{F} \in \Gamma} \mathcal{F}$ . Montrons que  $\mathcal{E}$  est un majorant de  $\Gamma$  dans  $\Pi$ .

Si  $\mathcal{F} \in \Gamma$ , alors  $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$  par définition de  $\mathcal{E}$ . Ainsi  $\mathcal{E}$  est un majorant de  $\Gamma$  dans  $\mathcal{P}(\mathcal{P}_2(E))$ .  
Il reste à montrer que  $\mathcal{E}$  appartient à  $\Pi$ .

Chaque  $\mathcal{F}$  appartenant à  $\Gamma$  est constitué de paires d'éléments de  $E$ . Par conséquent,  $\mathcal{E}$  est constitué de paires d'éléments de  $E$ .

Soient  $P_1$  et  $P_2$  deux paires distinctes d'éléments de  $E$  appartenant à  $\mathcal{E}$ . Il existe alors  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \Gamma$  tels que  $P_1 \in \mathcal{F}_1$  et  $P_2 \in \mathcal{F}_2$ . Comme  $\Gamma$  est totalement ordonnée, on a  $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$  ou  $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$ . Pour fixer les idées, on suppose que  $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ . Dès lors,  $P_1$  et  $P_2$  appartiennent à  $\mathcal{F}_2$ . Et comme  $\mathcal{F}_2$  est constitué de paires d'éléments de  $E$  qui sont disjointes, on en déduit que  $P_1$  et  $P_2$  sont disjointes. On a ainsi démontré que toutes les paires d'éléments de  $E$  qui appartiennent à  $\mathcal{E}$  sont disjointes. On en déduit que  $\mathcal{E}$  appartient bien à  $\Pi$ . En conclusion,  $\mathcal{E}$  est un majorant de  $\Gamma$  dans  $\Pi$ .

**11°)** L'ensemble  $\mathcal{E}$  est constitué de paires d'éléments de  $E$  qui sont disjointes.

Notons  $F = \bigcup_{P \in \mathcal{E}} P$ . Ainsi,  $\mathcal{E}$  est une partition par paires de  $F$ . Il s'agit donc de montrer

que  $F = E$ , ou bien qu'il existe un élément  $x$  de  $E$  tel que  $F = E \setminus \{x\}$ .

Raisonnons par l'absurde en supposant que  $F \neq E$  et que, pour tout  $x \in E$ ,

$F \neq E \setminus \{x\}$ .

$F \neq E$ , donc il existe  $a \in E$  tel que  $a \notin F$ . Mais  $F \neq E \setminus \{a\}$ , donc il existe  $b \in E \setminus \{a\}$  tel que  $b \notin F$ . Alors  $F \subset E \setminus \{a, b\}$ . Dans ce cas,  $\mathcal{E} \sqcup \{\{a, b\}\}$  est aussi un élément de  $\Pi$ , strictement plus grand que  $\mathcal{E}$ , ce qui est impossible car  $\mathcal{E}$  est maximal.

**12°)** D'après la question précédente,  $E$  est pair ou bien il existe  $x \in E$  tel que  $E \setminus \{x\}$  est pair, mais d'après la question 8, il existe une bijection entre  $E$  et  $E \setminus \{x\}$ , donc d'après la première question, lorsque  $E \setminus \{x\}$  est pair,  $E$  est aussi pair.

En conclusion, on a montré que tout ensemble infini est pair.