

MPSI 2  
Programme des colles de mathématiques.  
Semaine 10 : du lundi 11 au vendredi 15 décembre.

### Liste des questions de cours

- 1°) Énoncer et démontrer la formule de Taylor avec reste intégral.
- 2°) Pour  $t \in \mathbb{R}$ , développer  $e^t$  en série (entière).
- 3°) Calculer  $\sum_{k=0}^n \cos(kt)$ .
- 4°) Linéariser  $\cos^3 \theta$  en utilisant les complexes.
- 5°) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un unique polynôme  $T_n$  tel que, pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$ .
- 6°) Établir différentes conditions de colinéarité ou d'orthogonalité de deux vecteurs, en fonction de leurs affixes.
- 7°) Définir la similitude directe de centre  $z_0 \in \mathbb{C}$ , d'angle  $\theta \in \mathbb{R}$  et de rapport  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ . Préciser sa bijection réciproque, ses points fixes. Montrer qu'elle conserve les proportions et les angles.
- 8°) Déterminer les éléments géométriques de la transformation  $z \mapsto az + b$  où  $a, b \in \mathbb{C}$  avec  $a \neq 0$ .
- 9°) Montrer que l'ensemble des similitudes affines directes est un sous-groupe de  $\mathcal{S}(\mathbb{C})$ .

### Le thème de la semaine : complexes (avec géométrie)

#### 1 Les complexes

Le programme de colles précédent est à réviser, il pourra faire l'objet d'exercices.

#### 2 Complexes et géométrie

##### 2.1 Distances et angles

Affixe d'un vecteur.

Traduction en termes de complexes de la distance entre 2 points et de l'angle entre deux vecteurs.

##### 2.2 Orthogonalité et colinéarité

**Propriété.** Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls d'affixes  $u = a + ib$  et  $v = c + id$ .

$$- \vec{u} // \vec{v} \iff \frac{u}{v} \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im}(\bar{u}v) = 0 \iff ad - bc \stackrel{\Delta}{=} \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \stackrel{\Delta}{=} \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0.$$

$\det(\vec{u}, \vec{v})$  est le déterminant (auss appelé le produit mixte) des deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

—  $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \frac{u}{v} \in i\mathbb{R} \iff \operatorname{Re}(\bar{u}v) = 0 \iff ac + bd \stackrel{\Delta}{=} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0.$   
 $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$  est le produit scalaire des deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

**Corollaire.** Conditions pour que trois points soient alignés, pour qu'ils forment un triangle rectangle.

### 2.3 Équation d'un cercle

Le cercle de centre  $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$  et de rayon  $r > 0$  a pour équation

$$|z - \alpha| = r \iff (z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha}) = r^2 \iff x^2 + y^2 - 2ax - 2by = r^2 - a^2 - b^2.$$

Réciproquement, un ensemble admettant une équation cartésienne de la forme

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = c$  est un cercle éventuellement réduit à un point ou à l'ensemble vide.

### 2.4 Les similitudes directes

**Définition.** Une isométrie est une application qui conserve les distances.

Translations, rotations de centre  $z_0$  et d'angle  $\theta$ , homothéties, similitude directe de centre  $z_0 \in \mathbb{C}$ , d'angle  $\theta \in \mathbb{R}$  et de rapport  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  : étude des points fixes, conservation des proportions et des angles.

**Définition.** On dit que  $f$  est une similitude affine directe si et seulement si c'est une application de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  de la forme  $z \mapsto az + b$ , où  $a \in \mathbb{C}^*$  et  $b \in \mathbb{C}$ .

Une similitude directe est ou bien une translation, ou bien une similitude définie par un centre, un angle et un rapport.

**Propriété.** L'ensemble  $S^+$  des similitudes affines directes est un sous-groupe de  $\mathcal{S}(\mathbb{C})$ , dont l'ensemble des similitudes vectorielles directes est un sous-groupe.

**Propriété.** L'application qui à la similitude  $z \mapsto az + b$  associe  $a$  (resp :  $|a|$ ) est un morphisme de groupes, dont le noyau est le sous-groupe des translations (resp : des rotations et des translations).

**Corollaire.** Une composée, quel que soit l'ordre, de translations, de rotations dont la somme des angles est égale à  $\theta$  et d'homothéties dont le produit des rapports est égal à  $\lambda$  est une similitude directe de la forme  $z \mapsto \lambda e^{i\theta} z + b$ .

**Propriété.** Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$  et  $(a', b', c') \in \mathbb{C}^3$  deux triangles non aplatis. On dit qu'ils sont directement semblables si et seulement si ils vérifient l'une des propriétés équivalentes suivantes.

1. Il existe  $s \in S^+$  telle que  $a' = s(a)$ ,  $b' = s(b)$  et  $c' = s(c)$  ;
2.  $\frac{c - a}{b - a} = \frac{c' - a'}{b' - a'}$  ;
3. Le quotient des longueurs des côtés du triangle  $(a, b, c)$  issues de  $a$  est égal au quotient des longueurs des côtés du triangle  $(a', b', c')$  issues de  $a'$  et les angles  $\widehat{bac}$  et  $\widehat{b'a'c'}$  sont égaux ;
4. Les triangles  $(a, b, c)$  et  $(a', b', c')$  ont les mêmes angles.

Les similitudes indirectes ont seulement été évoquées mais n'ont pas fait l'objet d'une étude détaillée.

## Prévisions pour la semaine prochaine :

Groupes.