DS 4

Les calculatrices sont interdites.

Exercices

Exercice 1 :

Etudier l'injectivité et la surjectivité de l'application f, de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{Q}$ définie par $f(p, q) = p + \frac{1}{q^2}$.

Exercice 2 :

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$, $n^{\frac{1}{n}} \leq 1 + \left(\dfrac{6}{n(n-2)}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Exercice 3 :

Dans un jeu de 52 cartes, combien de mains de 13 cartes peut-on constituer qui contiennent 3 piques exactement, 5 cartes d'une certaine couleur et 5 cartes d'une autre couleur ?
On pourra se contenter de donner la réponse en fonction de certains coefficients binomiaux, sans calculer ces derniers.

Exercice 4 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer la dérivée n-ième de l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^2 e^{2x}$.

Problème : ensembles équipotents

Lorsque E est un ensemble, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.
Si E et F sont des ensembles, on note F^E l'ensemble des applications de E dans F.

$\mathcal{E}$ désigne un ensemble dont les éléments sont eux-mêmes des ensembles.
On suppose que $\mathcal{E}$ contient tous les ensembles usuels ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$).
Lorsque $E, F \in \mathcal{E}$, on supppose que $\mathcal{P}(E)$ et F^E sont des éléments de $\mathcal{E}$.
Plus généralement, on considère que $\mathcal{E}$ admet parmi ses éléments tous les ensembles considérés dans la suite de ce problème, même lorsque ce n'est pas explicitement signalé.

Partie I : Équipotence

Lorsque F et G sont deux éléments de $\mathcal{E}$, on dit que F et G sont équipotents si et seulement si il existe une bijection de F dans G.

1°) Montrer que la relation "être équipotent" est une relation d'équivalence sur $\mathcal{E}$.

Pour la suite, cette relation sera appelée la relation d'équipotence. Lorsque $E \in \mathcal{E}$, la classe d'équivalence de E pour la relation d'équipotence sera appelée la classe d'équipotence de E.

2°) Soit $E \in \mathcal{E}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Lorsque E est de cardinal n, quelle est la classe d'équipotence de E ?
Lorsque E est une partie de $\mathbb{N}$, quelle est la classe d'équipotence de E ?

3°) Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{N}_N$ est équipotent à l'ensemble des applications croissantes de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_p$.

4°) On note α l'application de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
pour tout $x \in]0,1[$, $\alpha(x) = \dfrac{2x-1}{4x(1-x)}$.
En utilisant α, montrer que $]0,1[$ et $\mathbb{R}$ sont équipotents.

5°) Montrer que $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$ sont équipotents.

6°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $2n$ éléments de $\mathcal{E}$, notés $E_1, \ldots, E_n$ et $F_1, \ldots, F_n$.
On suppose que, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, E_i est équipotent à F_i.
Montrer que $E_1 \times \cdots \times E_n$ est équipotent à $F_1 \times \cdots \times F_n$.

7°) On suppose que A, B, E et F sont quatre éléments de $\mathcal{E}$.
On suppose que A et E sont équipotents. On suppose que B et F sont équipotents.
Montrer que B^A et F^E sont équipotents.

8°) Soit A, B et C trois éléments de $\mathcal{E}$.
Montrer que $(A^B)^C$ est équipotent à $A^{B \times C}$.

9°) Soit I un ensemble. Montrer que I et $\mathcal{P}(I)$ ne sont pas équipotents.

10°) Soit I un ensemble. Montrer que $\mathcal{P}(I)$ est équipotent à $\{0,1\}^I$.

Partie II : Subpotence

Lorsque F et G sont deux éléments de $\mathcal{E}$, on dit que F est subpotent à G si et seulement si il existe une injection de F dans G.

11°) Montrer que $\mathbb{N}$ est subpotent à tout ensemble infini E tel que $E \in \mathcal{E}$.

12°) Soit $F, G \in \mathcal{E}$ avec $F \neq \emptyset$. Montrer que F est subpotent à G si et seulement si il existe une surjection de G dans F.

On admet le théorème de Cantor-Bernstein selon lequel, pour tout $E, F \in \mathcal{E}$, E et F sont équipotents si et seulement si E est subpotent à F et F est subpotent à E.

13°) Lorsque $E \in \mathcal{E}$, on note $\overline{E}$ la classe d'équipotence de E.
Si $E, F \in \mathcal{E}$, on convient que $\overline{E} \leq \overline{F}$ si et seulement si E est subpotent à F.
Démontrer que "$\leq$" est une relation d'ordre sur l'ensemble des classes d'équipotence de $\mathcal{E}$.

14°) Soit $E \in \mathcal{E}$. On suppose que E est infini.
Soit $x \in E$. On suppose que $E \setminus \{x\} \in \mathcal{E}$.
Montrer que E et $E \setminus \{x\}$ sont équipotents.

15°) Soit E un ensemble (élement de $\mathcal{E}$). On suppose qu'il existe une partie F de E telle que F est dénombrable et $E \setminus F$ est infini.
Montrer que E et $E \setminus F$ sont équipotents.

16°) En utilisant la notion de développement d'un réel en base a (où a est un entier tel que $a \geq 2$), montrer que $]0, 1[$ et $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ sont équipotents.
En déduire que $]0, 1[^2$ est équipotent à $]0, 1[$.

17°) En déduire que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est équipotent à $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ (sans utiliser la partie III).

18°) On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que $\mathcal{C}$ est équipotent à $\mathbb{R}$ (*Indication :* on pourra penser à restreindre les éléments de $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{Q}$).

Partie III : Equipotence entre E et E^2

Dans cette partie, E désigne un élément de $\mathcal{E}$ tel que E est équipotent à E^2.

19°) Que peut-on dire de E s'il est fini ?

Pour toute la suite, on suppose que E est infini.

20°) Montrer que E^E est subpotent à $\mathcal{P}(E^2)$.

21°) Soit $A, B \in \mathcal{E}$. On suppose que A est subpotent à B. Montrer que $\mathcal{P}(A)$ est subpotent à $\mathcal{P}(B)$. En déduire que $\mathcal{P}(E^2)$ est subpotent à $\mathcal{P}(E)$.

22°) Montrer que $\mathcal{P}(E)$ est subpotent à E^E.

23°) En déduire que E^E et $\mathcal{P}(E)$ sont équipotents.